

Untersuchungen zu Eichanomalien im
Rahmen des Hamiltonschen Zugangs:
Anomalien und Gerbes

Diplomarbeit

von

Cornelius Paufler.

Angefertigt in der Abteilung Quantenfeldtheorie
am Institut für Theoretische Physik
der Fakultät für Physik und Geowissenschaften
der Universität zu Leipzig
und betreut von Prof. Dr. Gerd Rudolph und Dr. Bernd Crell.

Eingereicht im August 1997.

Wie sollte der Marquis de Carabas nicht existieren, wo doch selbst der gestiefelte Kater behauptet, in seinen Diensten zu stehen?

Umberto Eco, Das Foucaultsche Pendel

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
1.1	Symmetrien und der Begriff Anomalie	7
1.2	Die punktierte Gruppe	13
2	Konstruktion des Fock-Bündels	17
3	\mathbb{C}_*-Gruppoide und Gerbes	23
3.1	\mathbb{C}_* -Gruppoide	23
3.2	Gerbes	25
3.3	Gerbes über G-Hauptfaserbündeln	27
3.4	Die Dixmier-Douady-Klasse eines Gerbes	37
4	Das Determinantengerbe	41
4.1	Liftung von Gruppenwirkungen	44
5	Die Dixmier-Douady-Form	49
5.1	Gerbezusammenhänge	49
5.2	Gerbekrümmung und Dixmier-Douady-Form	51
5.3	$\check{H}^3(X, \mathbb{Z})$ vs. $H_{dR}^3(X, \mathbb{R})$	53
6	Spektralfluß, Index und Gerbes	57
6.1	Spektralfluß über \mathcal{A}	57
6.2	Indexbündel und Familienindex	61
6.3	Dixmier-Douady-Form und Krümmung in IND	63
7	Schwinger-Terme	65
7.1	Zusammenhangsform in \mathcal{A}	65
7.2	Einschub: Familienindextheorem	69
7.3	Eine Beispielrechnung	71
7.4	Eine universelle Konstruktion über $M \times \mathcal{A}/\mathcal{G}$	75
A	Bemerkungen zu \otimes und \ast	81

B Čech-Kohomologie	85
C Erweiterungen	89
C.1 Gruppenerweiterungen	89
C.2 Erweiterungen als Hauptfaserbündel	92
D δ-Kohomologie	97
Literaturverzeichnis	99
Zusammenfassung	103
Danksagung	107
Selbständigkeitserklärung & Abtretung an die Bibliothek	109

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Symmetrien und der Begriff Anomalie

Spätestens seit der Arbeit von E. Noether [28] ist die Bedeutung von Symmetrien in der Physik deutlich geworden. Kurz gesagt, bedeutet die Invarianz des Wirkungsfunktional einer klassischen Theorie unter einer stetigen Gruppe von Transformationen die Existenz bestimmter Erhaltungsgrößen.

In der Physik treten nun die verschiedensten Theorien auf, daß heißt man konstruiert Lagrange-Dichten, die die unterschiedlichsten Transformationen zulassen. In dieser Arbeit wollen wir uns auf Yang-Mills-Theorien mit einer kompakten Eichgruppe beschränken. Hier steht in der Lagrange-Dichte ein Yang-Mills-Potential (auch Eichpotential oder Zusammenhang genannt), welches sich unter der Gruppe der Eichtransformationen auf eine bestimmte Weise¹ transformiert, wobei das Wirkungsfunktional invariant gelassen wird.

Konkret bedeutet das zum Beispiel für eine typische euklidische Lagrange-Dichte masseloser Fermionen in einer nichtabelschen Theorie²

$$\mathcal{L}_{na} = \bar{\Psi}_L i \mathcal{D}_L \Psi_L + \bar{\Psi}_R i \mathcal{D}_R \Psi_R + \frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu},$$

daß die Summe aus links- und rechts-chiralem Strom erhalten bleibt,

$$D_L j_L + D_R j_R = 0.$$

¹Allgemeine Erläuterungen der Begriffe und das konkrete Transformationsverhalten der Zusammenhänge findet man im Abschnitt 1.2 „Notationen“ dieses Kapitels.

²Hier sind $\psi_{L,R} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \psi$ der links- bzw. rechts-chirale Anteil der Fermionen, $D_{L,R} = \partial + A_{L,R}$ die kovarianten Ableitungen mit den Zusammenhängen $A_{L,R\mu} = A_\mu \pm \Gamma_\mu$ (Wobei $A_\mu = A_\mu^a \lambda^a$ bzw. $\Gamma_\mu \gamma^5$ für die μ -Komponenten der Zusammenhänge im Eich- bzw. (flachen) Spinorenbündel stehen.) und F die Krümmung des Yang-Mills-Zusammenhangs. Der Schrägstrich bedeutet $\bar{A} = \gamma^\mu A_\mu$, analog für die anderen Größen. Der Querbalken $\bar{\psi}$ bezeichnet die Konjugation, $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$. Zu den hier betrachteten Eichtransformationen gehört der Strom $j_\mu^a := \bar{\psi} \gamma_\mu \lambda^a \psi$ mit den Generatoren λ^a der Lie-Algebra der Strukturgruppe (oder Eichgruppe).

Gleiches gilt (für masselose Teilchen) für die Differenz $j_L - j_R$, es sind also beide Ströme separat kovariant erhalten.

Allgemein bedeutet das Verlorengeden einer solchen klassischen Symmetrie bei Quantisierung das Auftreten einer Anomalie. Betrachtet man nämlich die Quantisierung von chiralen, masselosen Fermionen, so startet man vom euklidischen Wirkungsfunktional

$$S[A] = -i \int d^4x \mathcal{L}_{na},$$

welches invariant ist unter Eichtransformationen, und erwartet zunächst, daß im (ebenfalls euklidischen) Pfadintegral nach Feynman

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\mathcal{A} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{-S[A, \Psi]}$$

die Integration über die fermionischen Felder

$$\mathcal{Z}[A] = \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{-S[A, \Psi]}$$

auch diese Eigenschaft zeigt. Dann könnte man die Integration über Orbits der Gruppe der Eichtransformationen abspalten. Es stellt sich jedoch heraus, daß die Invarianz der euklidischen Quantenwirkung

$$\mathcal{W}[A] := -\ln \mathcal{Z}[A]$$

unter Eichtransformationen mit dem Bestehen von sogenannten Ward-Identitäten³ verknüpft sind. Diese stellen eine Beziehung zwischen der Divergenz des Erwartungswertes des quantisierten Stromes und dem Erwartungswert der Stromdivergenz her. Die einzelnen Erwartungswerte dieser Gleichungen sind jedoch im allgemeinen divergent und verlangen eine Regularisierung. Dabei entstehen zusätzliche Terme, die man als Abänderung des Divergenzterms des klassischen Stromes und damit als eine Brechung der klassischen Symmetrie auffassen kann. Man spricht vom Auftreten einer Anomalie. Gleiches gilt für das obige Integral, welches formal (unter Beachtung der Rechenregeln für Graßmann-Variablen) die Determinante des in der klassischen Wirkung auftretenden Dirac-Operators darstellt. Hier ergibt sich die Notwendigkeit der Regularisierung der Determinante eines Operators zwischen zwei verschiedenen unendlichdimensionalen Räumen⁴. Dabei geht in der Regel eine Eigenschaft der Determinante, und zwar $\det(AB) = \det A \det B$,

³Siehe zum Beispiel [5].

⁴Eine Darstellung findet man in [30].

verloren und man kann nicht mehr die Erwartung hegen, daß sich Eichtransformationen in der Determinante kürzen. Man schreibt für infinitesimale Eichtransformationen Φ , die das Yang-Mills-Potential A in A^Φ überführen,

$$\delta \mathcal{W}[A] = \mathcal{W}[A^\Phi] - \mathcal{W}[A] = \alpha[A, \Phi],$$

oder als Funktionalableitung

$$T^a \mathcal{W}[A](x) = \left(\nabla_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} \right) \mathcal{W}[A] = \mathfrak{Q}^a[A](x).$$

Der Satz der T^a ist eine Darstellung der Lie-Algebra der Eichgruppe und erfüllt deshalb [30, 17]

$$T^a \mathfrak{Q}^b[A](x) - T^b \mathfrak{Q}^a[A](y) = f^{abc} \mathfrak{Q}^c[A](y) \delta(x - y). \quad (1.1.1)$$

Die konkrete Gestalt des Anomalie-Terms hängt nun von der Wahl des Regularisierungsschemas ab. Nimmt man nämlich ein anderes zur Hand, so führt man damit in der klassischen Lagrange-Dichte Konterterme, daß heißt Polynome der Felder A_μ sowie deren ersten Ableitungen, ein und ändert damit die Quantenwirkung \mathcal{W} um einen lokalen Beitrag,

$$\widetilde{\mathcal{W}}[A] = \mathcal{W}[A] + f[A].$$

Dieser Summand zeigt im allgemeinen ein anderes Verhalten unter Eichtransformationen als die Wirkung \mathcal{W} , so daß sofort die Hoffnung entsteht, daß Eichinvarianz durch geschickte Wahl der Regularisierungstechnik wiederherstellbar ist. Dies ist äquivalent zur Existenz eines lokalen Polynoms $\Omega(A)$, welches

$$\mathfrak{Q}^a(x) = T^a(x) \Omega(A) \quad (1.1.2)$$

erfüllt. (Die Quantenwirkung kommt nicht in Frage, da sie nicht lokal ist.) Gleichung (1.1.1) heißt Kozyklusbedingung, \mathfrak{Q}^a ist ein Kozyklus. Läßt sich auch noch (1.1.2) befriedigen, so spricht man von einem trivialen Kozyklus. Kozyklen treten aber auch in der Klassifikation von Erweiterungen einer Gruppe um eine andere auf und lassen sich durch topologische Eigenschaften der Gruppe beschreiben. Eine solche geometrische Interpretation ist auch wünschenswert, da sie nützlich beim Verständnis der Quantisierung von Feldtheorien sein kann.

Es existiert aber auch noch ein weiterer Zugang zur Quantisierung von Feldtheorien, die sogenannte kanonische Quantisierung. Wir werden sehen, daß sich auch hier die oben beschriebenen Anomalien äußern. Doch zunächst soll hier die kanonische Quantisierung einer relativistischen Quantenmechanik im äußeren Yang-Mills-Feld skizziert werden. Eine ausführlichere Darstellung, speziell die

Konstruktion der Algebra $\mathfrak{A}^{CAR}(\mathcal{K}, \Gamma)$ der kanonischen Antivertauschungsregeln findet man zum Beispiel in [1].

Ausgangspunkt ist ein Ein-Teilchen-Hilbert-Raum mit Dirac-Operator. Dieser nimmt in 4 Dimensionen die folgende (lokale) Gestalt⁵ an (für triviales Spinorbündel):

$$\mathcal{D}_A = \gamma^\mu (i\partial_\mu + A_\mu)$$

Lokal (über einer offenen Umgebung der Basismannigfaltigkeit) findet man nun immer eine Eichtransformation, unter der die 0-Komponente A_0 verschwindet⁶. Dies entspricht nicht einer vollständigen Eichung, bei der man ja versucht, aus jeder Klasse von eichäquivalenten Potentialen einen Repräsentanten herauszusuchen. Die Dirac-Gleichung erhält man jetzt in lokalen Koordinaten dieser Umgebung zu

$$\mathcal{D}_{A^{temp}} \Psi = (i\gamma^0 \partial_0 + \gamma^a (i\partial_a + A_a^{temp})) \Psi = 0.$$

Eine solche Wahl eines Zusammenhangs nennt man temporäre Eichung, wir wollen hier die Bezeichnung A^{temp} verwenden. Gleichzeitig reduzieren wir die Gruppe der Eichtransformationen auf solche, die die temporäre Eichung respektieren, daß heißt, die zeitunabhängig sind. In Analogie zur Schrödinger-Gleichung schreibt man nun

$$-i\partial_0 \Psi = \gamma^0 \gamma^a (i\partial_a + A_a^{temp}) \Psi, \quad (1.1.3)$$

mit einem Dirac-Hamilton-Operator $\gamma^0 \gamma^a (\partial_a + A_a^{temp})$. Dieser vertauscht mit dem Projektor $\frac{1 \pm \gamma^5}{2}$:

$$\gamma^0 \gamma^a (i\partial_a + A_a^{temp}) \frac{1 \pm \gamma^5}{2} = \gamma^0 \frac{1 \pm \gamma^5}{2} \gamma^a (i\partial_a + A_a^{temp}) = \frac{1 \pm \gamma^5}{2} \gamma^0 \gamma^a (i\partial_a + A_a^{temp})$$

und ist (formal) bezüglich des kanonischen Skalarproduktes selbstadjungiert. Da der Dirac-Hamilton-Operator mit $\frac{1 \pm \gamma^5}{2}$ vertauscht, können wir (1.1.3) für beide Chiralitätssorten getrennt aufschreiben,

$$-i\partial_0 \Psi_{L,R} = \gamma^0 \gamma^a (i\partial_a + A_a^{temp}) \Psi_{L,R}. \quad (1.1.4)$$

⁵Es handelt sich hier um den sogenannten gewisteten Dirac-Operator, der auf $\mathcal{S} \otimes E$ wirkt, wobei \mathcal{S} das Spinorbündel und E das assoziierte Vektorbündel zum Yang-Mills-Hauptfaserbündel bezeichnen. Der Begriff wird zum Beispiel in [4] eingeführt.

⁶Hat die (vierdimensionale) Mannigfaltigkeit M^{2n} die Struktur $M^{2n-1} \times T$, d.h. kann man die zeitartige Richtung global integrieren und ist die Zeitrichtung nicht kompakt, so kann man die sich für die gesuchte Eichtransformation Φ ergebende Gleichung

$$(A^\Phi)_0 \stackrel{!}{=} 0$$

durch Integration lösen.

Gleichung (1.1.4) erlaubt die Interpretation der Eigenwerte des Dirac-Hamilton-Operators als (relativistische) Energie von chiralen, masselosen Teilchen und damit die Konstruktion eines Fock-Raumes, siehe unten. Durch das Transformationsverhalten des Yang-Mills-Zusammenhangs transformiert sich $\gamma^0 \gamma^a (\partial_a + A_a^{temp})$ nämlich tensoriell unter Umeichungen und das Spektrum (und damit die Energie der Teilchen) bleibt folglich invariant.

Im folgenden bezeichnet also \mathcal{A} die Teilmenge der Yang-Mills-Potentiale, für die die Zeitkomponente A_0 verschwindet und \mathcal{G} die punktierte Gruppe der Eichtransformationen, die die temporäre „Eichung“ respektieren. Die Namen ‘Dirac-Operator’ und ‘Dirac-Hamilton-Operator’ werden im weiteren synonym verwendet, gemeint ist immer der wie oben beschrieben aus dem Dirac-Operator gewonnene Dirac-Hamilton-Operator.

Mit dem Dirac-Hamilton-Operator zu einem vorgegebenen Eichpotential wird nun auf kanonische Weise eine Fock-Raum-Darstellung der kanonischen Antivertauschungsregeln konstruiert, durch „Auffüllen des Dirac-Sees der Antiteilchen“ mit Zuständen negativer Energie. Das klassische Problem der Liftung einer stetigen Gruppe von unitären Ein-Teilchen-Operatoren⁷ führt über notwendige Renormierungen zu Zusatztermen (sogenannten Schwinger-Termen) in den Vertauschungsregeln der gelifteten Generatoren. Sind $H_{1,2}$ zwei Operatoren aus der Darstellung der Generatoren auf dem Ein-Teilchen-Raum und $dQ_P(H_{1,2})$ die entsprechenden Operatoren der gefundenen Darstellung auf dem Fock-Raum, so ergibt sich

$$[dQ_P(H_1), dQ_P(H_2)] = dQ_P([H_1, H_2]) + s_F(H_1, H_2).$$

s_F ist der Schwinger-Term, er zeigt das Auftreten einer Anomalie und signalisiert, daß man nur eine projektive Darstellung der betrachteten unitären Gruppe finden konnte. Es zeigt sich, daß die Schwinger-Terme kohomologisch gedeutet werden können. Die Jacobi-Identität verlangt nämlich

$$s_F(H_1, [H_2, H_3]) + s_F(H_2, [H_3, H_1]) + s_F(H_3, [H_1, H_2]) = 0.$$

Man sagt, s_F definiert einen Lie-Algebra-Kozyklus. Gilt andererseits

$$s_F(H_1, H_2) = \kappa([H_1, H_2])$$

für eine auf allen Operatoren H definierte beschränkte komplexwertige Funktion κ , so läßt sich zu den implementierten Generatoren $dQ_P(H)$ eben dieses $\kappa(H)$ addieren, und der Schwinger-Term verschwindet. In diesem Fall ist s_F ein trivialer Kozyklus.

⁷Auch hier sei auf die Arakische Arbeit [1] verwiesen.

Wendet man nun diese Erkenntnisse auf eine Yang-Mills-Theorie an, daß heißt sucht man Darstellungen der Gruppe der Eichtransformationen⁸, auf dem Fock-Raum, so bemerkt man zunächst, daß die Konstruktion des Fock-Raumes abhängig vom konkret gewählten Eichpotential war. Eichtransformationen wirken nicht innerhalb eines Fock-Raumes, sondern zwischen zwei Räumen, deren zugrundeliegende Yang-Mills-Zusammenhänge durch ebendiese Eichtransformationen auseinander hervorgehen. Erstes Ziel muß es also sein, ein Vektorbündel über dem Raum aller Zusammenhänge der Theorie⁹ zu konstruieren. Das ist das Ziel von Kapitel 2.

Die Vorgehensweise ist dabei, zuerst ein Fock-Bündel über \mathcal{A} zu konstruieren und dieses nach der Gruppe der Eichtransformationen zu faktorisieren, denn der Eichorbitraum verkörpert ja die Menge aller physikalisch verschiedenen Konfigurationen. Schon bei der Konstruktion über \mathcal{A} tritt jedoch der Spektralfluß auf. Das bedeutet, daß man global (d.h. für alle Zusammenhänge gleichermaßen) keinen Vakuumschnitt über \mathcal{A} findet. Der Vakuumzustand ist aber notwendig, um die Aufspaltung des Ein-Teilchen-Hilbert-Raumes in Teilchen und Antiteilchen vorzunehmen. Um dieses Problem zu umgehen, führt man lokale Überdeckungen von \mathcal{A} ein, innerhalb derer kein Spektralfluß auftreten kann. Um nun ein Vektorbündel zu erhalten, muß man sich nur noch die Übergangsfunktionen anschauen. Diese führen auf ein \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel¹⁰ DET , welches eine Gruppoidmultiplikation zwischen Fasern besitzt. Es zeigt sich, daß die Übergangsabbildungen nicht ohne weiteres die für Bündel geforderten Eigenschaften erfüllen. Man erhält also vorerst nur ein projektives Bündel. Soweit der Inhalt von Kapitel 2.

In Kapitel 3 wird nun das Bundle Gerbe, kurz Gerbe, eine Konstruktion von Murray [26], eingeführt und genauer untersucht. Wichtig ist hierbei der Begriff des trivialen Gerbes, für dessen Auftreten auch Kriterien gefunden werden. Dieses ist eine bestimmte Klasse in der Čechschen Kohomologie, die Dixmier-Douady-Klasse.

In Kapitel 4 zeigt sich, daß das oben erwähnte \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel DET die Struktur eines Gerbes hat. Es wird auch bewiesen, daß die Trivialität von DET genau die Bedingung ist, unter der sich zu dem projektiven Fock-Bündel aus Kapitel 2 ein Fock-Bündel finden läßt.

Die nächste Frage ist nun, ob die Trivialität von DET im Gerbesinne unter Faktorisierung nach der Gruppe der Eichtransformationen erhalten bleibt. Dann kann man die am Anfang gestellte Frage nach der Existenz eines Fock-Bündels über \mathcal{A}/\mathcal{G} positiv beantworten.

⁸Oder einer Untergruppe davon, wie im Abschnitt 1.2 dargelegt werden wird.

⁹Wie bereits erwähnt, beschränken wir uns auf Zusammenhänge in temporärer Eichung.

¹⁰Genauer ein \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel über $\mathcal{A}_0^{[2]}$. $\mathcal{A}_0^{[2]}$ entsteht aus \mathcal{A} und dem Komplement des Spektrums des Dirac-Operators in jedem Punkt über \mathcal{A} , siehe dazu Kapitel 4.

Kapitel 5 und 6 stellen den Bezug zu bereits bekannten Ausdrücken für Anomalien, den Schwinger-Termen, her. Dafür wird in Kapitel 5 zunächst der Begriff des Gerbezusammenhangs eingeführt und gezeigt, daß man aus dessen Krümmung durch Transgression eine 3-Form über \mathcal{A} (oder besser eine Klasse im deRham-schen Sinne) gewinnt, die in 1-1-Korrespondenz zur Dixmier-Douady-Klasse ist.

Kapitel 6 wendet sich wieder dem anfangs aufgetretenen Problem des Spektralflusses zu und stellt die Verbindung zum Index der betrachteten Dirac-Operatoren her. Das dabei auftretende Indexbündel trivialisiert nun das Gerbe DET . Die Frage ist nun, ob sich die Gruppenwirkung der Eichtransformationen verträglich mit der Trivialisierung in dieses Indexbündel liften läßt. Es wird sich herausstellen, daß dabei die Krümmung des Indexbündels eine wesentliche Rolle spielt.

In Kapitel 7 werden dann aus der Krümmung des Indexbündels mit dem Indextheorem die bekannten Schwinger-Terme reproduziert.

Der Anhang beleuchtet technische Details zur Gruppoidmultiplikation in DET , zur Čech-Kohomologie, zu Gruppenerweiterungen und zur Trivialität einer bestimmten Kohomologie, die im Laufe der Arbeit eingeführt wird.

Der nächste Abschnitt klärt den Begriff Gruppe der Eichtransformationen und erläutert die Konstruktion einer Untergruppe der punktierten Gruppe. Diese Einschränkung ist notwendig, um eine freie Wirkung auf dem Raum aller Yang-Mills-Zusammenhänge zu erhalten.

1.2 Die punktierte Gruppe

In einer Yang-Mills-Theorie hat man zunächst eine Mannigfaltigkeit X vorliegen, die in dieser Arbeit immer als kompakt angenommen werden soll. Weiter existiere über X ein Hauptfaserbündel $P \rightarrow X$, ausführlich

$$(P, X, \pi, G, \psi, \{\xi_i\})^{11}.$$

mit Strukturgruppe G und rechter Gruppenwirkung ψ . Charakteristisch für ein Hauptfaserbündel ist nun, daß man immer erst eine horizontale Richtung auszeichnen muß. Dies geschieht mit Hilfe einer Zusammenhangs-1-Form. Die Menge aller derartige Yang-Mills-Potentiale (so der physikalische Begriff) bezeichnen wir hier mit \mathcal{A} . Auf \mathcal{A} wirkt nun auch eine Gruppe, die Gruppe der Eichtransformationen \mathcal{G} . Diese werden wir nun im folgenden einführen.

Definition 1.1: *Ein Diffeomorphismus*

$$\Theta : P \rightarrow P$$

¹¹Hier ist P der Totalraum, X der Basisraum, $\pi : P \rightarrow X$ die Bündelprojektion, G die Strukturgruppe, $\psi : P \times G \ni (p, g) \mapsto \psi_g p \in P$ die rechte G -Wirkung auf P und $\{\xi_i\}$ eine lokale Trivialisierung zu einer Überdeckung $\{U_i\}$ von X . Zur Theorie der Hauptfaserbündel siehe zum Beispiel [21].

heißt Automorphismus des Hauptfaserbündels, falls gilt

1. $\exists \tilde{\Theta} : X \rightarrow X$, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\Theta} & P \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{\tilde{\Theta}} & X \end{array}$$

2. Θ vertauscht mit der G -Wirkung,

$$\Theta \circ \Psi_g = \Psi_g \circ \Theta \quad \forall g \in G.$$

Diese Automorphismen werden mit $\mathcal{A}ut(P)$ bezeichnet.

Definition 1.2: Ein vertikaler Automorphismus $\Theta: P \rightarrow P$ erfüllt zusätzlich

$$\pi \circ \Theta = Id_X \circ \pi,$$

das heißt $\tilde{\Theta} = Id_X$.

Die Menge der vertikalen Automorphismen versteht man mit dem Symbol $\mathcal{A}ut_X(P)$.

Lemma 1.3: $\mathcal{A}ut(P)$ bildet eine Gruppe mit der Hintereinanderausführung als Gruppenoperation. $\mathcal{A}ut_X(P)$ ist eine normale Untergruppe von $\mathcal{A}ut(P)$.

Definition 1.4: Die Gruppe $\mathcal{G} := \mathcal{A}ut_X(P)$ heißt Gruppe der (reinen, lokalen) Eichtransformationen.

Betrachtet man G als inneren Freiheitsgrad einer physikalischen Theorie, so beschreibt ein Element von \mathcal{G} gerade eine lokale Änderung dieses Freiheitsgrades, während $\mathcal{A}ut(P)$ zusätzlich noch in der Mannigfaltigkeit X abbildet. Es gilt der folgende

Satz 1.5: Jeder vertikalen Automorphismus $\Theta \in \mathcal{G}$ ist äquivalent zu einer äquivarianten differenzierbaren Abbildung $u : P \rightarrow G$ mit

$$\Theta(p) = \Psi_{u(p)} p \quad \forall p \in P$$

und umgekehrt. Äquivarianz bedeutet dabei

$$u(\Psi_a p) = a^{-1} u(p) a \quad \forall a \in G, p \in P. \quad (1.2.5)$$

Eine Eichtransformation läßt sich also durch eine derartige Abbildung u beschreiben. A sei nun ein Zusammenhang in P . Für Matrizen­gruppen transformiert sich dieser unter Θ (bzw. dem entsprechenden u) wie¹²

$$A_p^\Theta(\cdot) = u(p)^{-1}A_p(\cdot)u(p) + u(p)^{-1}du(p)(\cdot).$$

\mathcal{G} wirkt also über die Formel (1.2.6) auf \mathcal{A} .

In dieser Arbeit wird jedoch nicht die volle Gruppe \mathcal{G} , sondern nur eine Untergruppe, die sogenannte punktierte Gruppe der Eichtransformationen, betrachtet. Zur Konstruktion der punktierten Gruppe geht man nun wie folgt vor. Zuerst fixiert man einen Punkt x_0 auf X . Unter Beachtung, daß sich jede Eichtransformation Θ als eine Abbildung $u : P \rightarrow G$ auffassen läßt, definiert man nun

$$\mathcal{G}_0 := \{\Theta \in \mathcal{G} \mid \Theta(p_0) = p_0\} \text{ d.h.}$$

$$\mathcal{G}_0 \cong \{u : P \rightarrow G \mid u(p_0) = e_G\}$$

Dabei ist $p_0 \in P$ mit $\pi(p_0) = x_0$. Die Definition ist von der speziellen Wahl von p_0 in $\pi^{-1}(x_0)$ unabhängig, da

$$u(\psi_a p_0) = a^{-1}u(p_0) a = a^{-1}a = e_G.$$

Der Grund für die Beschränkung auf die punktierte Gruppe liegt darin, daß \mathcal{G}_0 frei auf \mathcal{A} wirkt. \mathcal{G}_0 bildet offensichtlich eine Untergruppe von \mathcal{G} . Damit wird $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$ ein \mathcal{G}_0 -Hauptfaserbündel.

Lemma 1.6: \mathcal{G}_0 operiert frei auf \mathcal{A} .

Sei $\Theta \in \mathcal{G}_0$ und $A \in \mathcal{A}$, so daß

$$A^\Theta = A. \quad (1.2.7)$$

Sei U_i eine Umgebung von x_0 aus der Überdeckung $\{\mathcal{U}\}$ von X , die P lokal trivialisiert. Man findet nun zu einer beliebigen Kurve in U_i durch x_0 einen horizontalen (bezüglich des gewählten Zusammenhangs A) Lift $\sigma_i(t)$ mit $\sigma_i(0) = p_0$, $\pi(p_0) = x_0$. Da $\sigma_i(t)$ horizontal ist, gilt

$$A_{\sigma_i(t)} \left(\frac{d}{dt} \sigma_i(t) \right) = 0 \quad (1.2.8)$$

¹²Der allgemeine Ausdruck lautet

$$A_p^\Theta := \Theta^* A_p = (Ad u(p)^{-1})A_p + L_{u(p)}^{-1} \circ u_* p. \quad (1.2.6)$$

Dabei ist $L_{u(p)}$ die Linksmultiplikation in G ; L_* die Tangentialabbildung zu L ; $u_* p : T_p P \rightarrow T_{u(p)} G$ die Tangentialabbildung von u im Punkt p .

für alle t im Definitionsbereich von $\sigma_i(t)$. Sei

$$\sigma_i^u(t) := \Psi_{u(\sigma_i(t))}\sigma_i(t)$$

der unter u transformierte Lift. Ist X_t der Tangentialvektor zu $\sigma_i(t)$ und X_t^u der zu $\sigma_i^u(t)$, so gilt unter Verwendung von (1.2.7) und (1.2.8)

$$A_{\Psi_{u(p_0)}p_0}(X^u) = \Theta^* A_{p_0}(X) = \Theta^*(0) = 0. \quad (1.2.9)$$

Damit ist auch $\sigma_i^u(t)$ horizontal. In p_0 war aber $u(p_0) = e$, und damit

$$\sigma_i^u(0) = \sigma_i(0). \quad (1.2.10)$$

Andererseits gilt nach Formel (1.2.6)

$$A(X_t^u) = \left(\text{Ad } u(\sigma_i(t))^{-1} \right) A(X_t) + u(\sigma_i(t))^{-1} \frac{d}{dt} u(\sigma_i(t)).$$

Setzt man hier nun (1.2.10) ein, so ergibt sich gleich

$$0 = u(\sigma_i(t))^{-1} \frac{d}{dt} u(\sigma_i(t)).$$

Also ist u konstant, $u \equiv e$. Da man lokal immer einen horizontalen Lift findet, der einen beliebigen Weg auf X überlagert, muß $u \equiv e$ auf ganz P gelten. u ist demnach das Einselement in \mathcal{G}_0 . \square

Im folgenden wird der Index nicht mehr mitgeführt, es bezeichnet also \mathcal{G} die Untergruppe aller derjenigen Elemente der vollen Eichgruppe, die die temporäre Eichung erhalten und außerdem der punktierten Gruppe der Eichtransformationen angehören.

Kapitel 2

Konstruktion des Fock-Bündels

Im folgenden stehe \mathbb{C}_* für die Menge $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Wie in der Einleitung erklärt, bezeichnet \mathcal{A} den Raum aller Yang-Mills-Zusammenhänge in temporärer Eichung über dem physikalischen Raum M , \mathcal{G} die punktierte Gruppe der zeitunabhängigen Eichtransformationen und \mathcal{D}_A den Dirac-Hamilton-Operator zu einem äußeren Feld A . Sei $A \in \mathcal{A}$ so gewählt, daß 0 nicht im Spektrum von \mathcal{D}_A enthalten ist. Dann läßt sich der Fock-Raum im äußeren Feld A , d.h. zum Dirac-Hamilton-Operator \mathcal{D}_A folgendermaßen konstruieren: Der Ein-Teilchen-Hilbert-Raum H spaltet auf in die direkte Summe zweier Teilräume,

$$H = H_A^+ \oplus H_A^-.$$

Dabei wird H_A^+ aufgespannt von allen Eigenvektoren von \mathcal{D}_A mit positiven und H_A^- von denen mit negativen Eigenwerten. Mit Hilfe der Ladungskonjugation (im folgenden durch eine Querbalken über dem Symbol gekennzeichnet) und dem antisymmetrischen Tensorprodukt erhält man daraus den Fock-Raum, $F_A = \wedge(H_A^+) \otimes \wedge(\overline{H_A^-})$. Wählt man nun einen Weg $I \ni t \mapsto A(t) \in \mathcal{A}$ im Raum der Zusammenhänge, so können dabei $A(t)$ auftreten, für die $0 \in \text{Spec}\{\mathcal{D}_A\}$ ist.

Ein einfaches **Beispiel** soll dies verdeutlichen. Wir betrachten einen 1+1-dimensionalen Minkowski-Raum. Die Dirac-Matrizen ergeben sich dann zu

$$\gamma^0 = \sigma_2, \gamma^1 = i\sigma_1, \gamma^5 = \gamma^0\gamma^1 = \sigma_3.$$

Dabei sind $\{\sigma\}$ die Pauli-Matrizen. Die Dirac-Gleichung nimmt für masselose Fermionen somit folgende Gestalt an:

$$[\sigma_2(i\partial_t) + i\sigma_1(i\partial_x + A_1)] \psi = 0.$$

Hier ist A die 1-Komponente des Eichpotentials (in temporärer Eichung soll ja die 0-Komponente verschwinden). Multipliziert man dies von rechts mit σ_2 , so erhält man

$$[i\partial_t + (i\partial_x - A)\sigma_3] \psi = 0.$$

Zerlegt man nun ψ in Anteile positiver und negativer Chiralität $\psi_{L,R} = \frac{1 \pm \gamma^5}{2} \psi$, so ergibt sich für den links-chiralen Anteil $\psi_L = \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ 0 \end{pmatrix}$ die Dirac-Gleichung

$$i\partial_t \psi_+ = (-i\partial_x + A) \psi_+ =: H_A \psi_+.$$

(Eine ähnliche Beziehung gilt für ψ_R .) Die temporäre Eichung erlaubt es, die Dirac-Gleichung in die Form einer Schrödinger-Gleichung (mit einem Hamilton-Operator $H_A := -i\partial_x + A$) zu bringen und damit dem Begriff Energie Sinn zu verleihen. Betrachten wir zunächst den Spezialfall $A = \text{const}$. Wir fordern periodische Randbedingungen für ψ_+ in Ortsrichtung

$$\psi_+(x, t) = \psi_+(x + 2n\pi, t).$$

Da H_A zeitunabhängig ist, führt ein Separationsansatz $\psi_+(x, t) = T(t)X(x)$ zum Spektrum von H_A . Man errechnet

$$\begin{aligned} i\partial_t T(t) &= ET(t); \quad -i\partial_x X(x) = (A - E)X(x) \\ \Rightarrow \psi_+(x, t) &= e^{iEt} e^{i(A-E)x} \end{aligned}$$

Das Spektrum von H_A ergibt sich nun aus den periodischen Randbedingungen:

$$(A - E) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{Spec}\{H_A\} = \{A + k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Jetzt betrachten wir eine Familie von Potentialen $\{A_{\{t_0\}}\}_{t_0 \in [0,1]}$ mit zeitabhängiger 1-Komponente auf $t \in [0, t_0]$,

$$A_{\{t_0\}}(t) = \begin{cases} A + t & \text{für } t \in [0, t_0) \\ A + t_0 & \text{für } t \in [t_0, 1] \end{cases}, \quad \text{wieder in temporärer Eichung.}$$

In diesem Fall ist das Spektrum von $H_{A_{\{t_0\}}}$ für $1 \geq t \geq t_0$

$$\text{Spec}\{H_{A_{\{t_0\}}}\} = \{A + t_0 + k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Im Spezialfall $t_0 = 1$ kann man aber bei $t = 1$ den Hamilton-Operator $H_{A_{\{1\}}} = H_{A_{\{1\}}}$ in die Form

$$H_{A_{\{1\}}} = e^{-ix} H_A e^{ix}$$

bringen. $H_{A_{\{1\}}}$ geht also durch eine Umeichung aus H_A hervor, das Spektrum ist das gleiche. In der Tat überzeugt man sich, daß

$$\begin{aligned} \text{Spec}\{H_{A_{\{1\}}}(1)\} &= \{A_{\{1\}}(1) + k, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{A + 1 + k, k \in \mathbb{Z}\} = \text{Spec}\{H_A\}. \end{aligned}$$

Führt man nun eine adiabatische Änderung von $A = A_{\{0\}} \rightarrow A_{\{1\}} = A + 1$ durch, so sieht einen Zustand der Energie $A + k + 1$ übergeht. Speziell hat man also auch Übergänge von Zuständen negativer Energie zu solchen positiver. Dieses Phänomen bezeichnet man als *Spektralfluß*. ■

Für Wege, bei denen ein Spektralfluß auftritt, springt die Dimension von H_A^+ bzw. H_A^- , die Fock-Räume über den einzelnen A sind also nicht isomorph zueinander. Um also über ganz \mathcal{A} ein Fock-Bündel zu erhalten, muß man lokal konstruieren. Zunächst wählt man eine offene Überdeckung $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ von \mathcal{A} . Sei

$$U_\lambda := \{A \in \mathcal{A} \mid \lambda \notin \text{Spec}\{\mathcal{D}_A\}\}$$

eine offene Menge in \mathcal{A} . U_λ ist offen, da das Spektrum diskret ist und stetig mit A variiert. Es gilt $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} U_\lambda = \mathcal{A}$, da zu jedem A aus \mathcal{A} mindestens ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$ gefunden werden kann (wieder weil das Spektrum diskret ist). Für ein $A \in \mathcal{A}$ fixiere man nun ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Nun kann man wieder den Hilbert-Raum H zerlegen in $H_{A,\lambda}^+ = \text{span}\{\psi_{A,\lambda}^+\}$ und $H_{A,\lambda}^- = \text{span}\{\psi_{A,\lambda}^-\}$, wobei $\psi_{A,\lambda}^\pm$ die Eigenvektoren von \mathcal{D}_A mit Eigenwerten $\gtrless \lambda$ sind (man beachte, daß λ ja nicht im Spektrum liegen soll). Es gilt $H = H_{A,\lambda}^+ \oplus H_{A,\lambda}^-$, und es ergibt sich ein Fock-Raum $F_{A,\lambda}$ über A :

$$F_{A,\lambda} = \bigwedge (H_{A,\lambda}^+) \otimes \bigwedge (\overline{H_{A,\lambda}^-})$$

Dieses Verfahren kann man nun über ganz U_λ durchführen. Für eine andere reelle Zahl μ aus der Resolventenmenge des Dirac-Hamilton-Operators \mathcal{D}_A wäre der Fock-Raum über A

$$F_{A,\mu} = \bigwedge (H_{A,\mu}^+) \otimes \bigwedge (\overline{H_{A,\mu}^-}).$$

Man kann das bisher Gesagte auch so verstehen, daß $F_{A,\lambda}$ bzw. $F_{A,\mu}$ jeweils Fasern im Punkt A zu verschiedenen trivialen Vektorbündeln über den offenen Mengen U_λ bzw. U_μ darstellen. Diese Mengen überschneiden sich offensichtlich in A . Um nun ein globales Vektorbündel zu erhalten, muß man noch die Übergangsabbildungen konstruieren. Dazu sei folgende Vorbemerkung gemacht. Sei $V_A = H_{A,\lambda}^+ \cap H_{A,\mu}^-$, wobei $\lambda < \mu$. Da das Spektrum von \mathcal{D}_A diskret und von endlicher Vielfachheit ist, gilt $\dim V_A = n < \infty$. Mit V_A ergibt sich die Zerlegung $H_{A,\lambda}^+ = H_{A,\mu}^+ \oplus V_A$ bzw. $H_{A,\mu}^- = H_{A,\lambda}^- \oplus V_A$, und dies wirkt sich folgendermaßen auf die Fock-Räume aus

$$\begin{aligned} F_{A,\lambda} &\cong \bigwedge (H_{A,\lambda}^+) \otimes \bigwedge (\overline{V_A}) \otimes \bigwedge (\overline{H_{A,\lambda}^-}) \\ F_{A,\mu} &\cong \bigwedge (H_{A,\lambda}^+) \otimes \bigwedge (V_A) \otimes \bigwedge (\overline{H_{A,\lambda}^-}) \end{aligned}$$

Es gilt

Lemma 2.1: *Mit den oben genannten Bezeichnungen existiert ein Isomorphismus $f_{A,\lambda,\mu} : F_{A,\lambda} \rightarrow F_{A,\mu}$. Dieser ist eindeutig bestimmt bis auf einen komplexen Faktor.*

Zum Beweis wählen wir ein von Null verschiedenes Element ω aus $\bigwedge^n(\overline{V}_A)$. Unter $g^{-1}\omega$ verstehe man die zu ω duale Form. Sei

$$f_{A,\lambda,\mu} : \bigwedge^p(V_A) \ni \alpha \mapsto g(i_\alpha g^{-1}(\omega)) \in \bigwedge^{(n-p)}(\overline{V}_A),$$

$f_{A,\lambda,\mu}$ sei die Identität auf $\bigwedge(H_{A,\mu}^+)$ bzw. $\bigwedge(\overline{H_{A,\lambda}^-})$.

Wie man sich leicht überzeugen kann, liefert dies den gewünschten Isomorphismus. \square

Definition 2.2: *Sei $DET_{A,\lambda,\mu} = \{\text{Menge der Isomorphismen } f_{A,\lambda,\mu}\}$.*

Wegen der Konstruktion von $f_{A,\lambda,\mu}$ sieht man leicht

$$DET_{A,\lambda,\mu} \cong \{0 \neq \omega \in \bigwedge^n(\overline{V}_A)\} \cong \mathbb{C}_*.$$

Die letzte Gleichheit gilt, da ω aus der maximalen äußeren Potenz von \overline{V}_A stammt und deshalb nur bis auf eine komplexe Zahl bestimmt ist. Dies rechtfertigt auch die Bezeichnung $DET_{A,\lambda,\mu}$, da eine Wahl für ω einer bestimmten Basis in \overline{V}_A entspricht. Zwei Basen unterscheiden sich aber nur durch einen Isomorphismus, der auf der höchsten äußeren Potenz $\bigwedge^n(V_A)$ zur Determinante führt. Auf $DET_{A,\lambda,\mu}$ wirkt also \mathbb{C}_* durch Multiplikation. Die Abbildungen $f_{A,\lambda,\mu}$ haben somit die Funktion von Übergangsabbildungen zwischen lokalen Trivialisierungen. Damit man ein Fock-Bündel erhält, muß man noch zusätzlich folgende Eigenschaft fordern:

$$f_{A,\lambda,\nu} \circ f_{A,\nu,\mu} \circ (f_{A,\lambda,\mu})^{-1} = \text{id}|_{U_\lambda \cap U_\nu \cap U_\mu},$$

für $\lambda < \nu < \mu$, $\{\lambda, \nu, \mu\} \cap \text{Spec}\{\mathcal{D}_A\} = \emptyset$. Das ist jedoch im allgemeinen nicht der Fall, da ja die Isomorphismen willkürlich gewählt werden können. Faktorisiert man aber nach dem komplexen Vorfaktor, so hat man die Wahl von ω fixiert. Quotientenbildung nach \mathbb{C}_* werden im weiteren durch ein vorangestelltes \mathbb{P} symbolisiert:

Man bildet also mit $\mathbb{P}(F_{A,\mu}) \cong \mathbb{P}(F_{A,\lambda}) =: \mathbb{P}(F_A)$

$$\mathcal{P} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathbb{P}(F_A),$$

und erhält so ein projektives Fock-Bündel über \mathcal{A} . Es stellt sich nun die Frage, ob über \mathcal{A} ein Hilbert-Bündel \mathcal{H} existiert, für das $\mathbb{P}(\mathcal{H}) = \mathcal{P}$ gilt. Wie wir in Kapitel 4 sehen werden, ist dies für den Raum \mathcal{A} erfüllt, aber wir interessieren uns speziell

dafür, ob diese Eigenschaft unter der Faktorisierung nach der Gruppe der Eichtransformationen erhalten bleibt.

Zum Abschluß dieses Kapitels noch eine interessante Struktur von DET , die das nächste Kapitel motivieren soll. Sei wieder $\lambda < \nu < \mu$, $\{\lambda, \nu, \mu\} \cap \text{Spec}\{\mathcal{D}_A\} = \emptyset$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_{A,\lambda}^+ \cap \mathbf{H}_{A,\mu}^-) &= (\mathbf{H}_{A,\lambda}^+ \cap \mathbf{H}_{A,\nu}^-) \oplus (\mathbf{H}_{A,\nu}^+ \cap \mathbf{H}_{A,\mu}^-), \text{ d.h.} \\ \Lambda(\mathbf{H}_{A,\lambda}^+ \cap \mathbf{H}_{A,\mu}^-) &= \Lambda(\mathbf{H}_{A,\lambda}^+ \cap \mathbf{H}_{A,\nu}^-) \otimes \Lambda(\mathbf{H}_{A,\nu}^+ \cap \mathbf{H}_{A,\mu}^-), \text{ und damit} \\ DET_{A,\lambda,\mu} &= DET_{A,\lambda,\nu} \otimes DET_{A,\nu,\mu}. \end{aligned}$$

Dabei meint \otimes die Bildung des kartesischen Produkts und anschließende Faktorisierung nach der Äquivalenzrelation $(f, \tilde{f}) \sim (f * z, \tilde{f} * z^{-1}) \forall z \in \mathbb{C}_*$. (Im allgemeinen wird dafür das Symbol $\times_{\mathbb{C}_*}$ benutzt, in dieser Arbeit aus Gründen, die im nächsten Kapitel klarer werden, jedoch nicht.) Setzt man noch

$$DET_{A,\mu,\lambda} = DET_{A,\lambda,\mu}^*,$$

wobei der Stern bedeuten soll, daß die \mathbb{C}_* -Wirkung gerade Multiplikation mit dem Inversen ist, so ergibt sich ein Gruppoid bezüglich der Operation \otimes .

Kapitel 3

\mathbb{C}_* -Gruppoide und Gerbes

3.1 \mathbb{C}_* -Gruppoide

Im ganzen Kapitel bezeichne X eine Mannigfaltigkeit und $\pi : P \rightarrow X^2 := X \times X$ ein \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel.

Man kann nun ein weiteres \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel $P \otimes P \rightarrow X^2$ konstruieren, indem man zuerst $P \times P$ bildet und dann nach der Relation $(p, \tilde{p}) \sim (p * z, \tilde{p} * z^{-1}) \forall z \in \mathbb{C}_*$ faktorisiert (* bezeichne die \mathbb{C}_* -Wirkung auf P , diese Konstruktion heißt kontrahiertes Produkt, siehe z.B. Brylinski [8]). Das Ergebnis ist somit wieder ein \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel. In der Sprache der assoziierten komplexen Linienbündel ist \otimes die Tensorierung des Vektorraums mit sich selber. Weitere Details findet man im Anhang.

Es bezeichne π_i die Projektion $X^2 \rightarrow X$ auf die i -te Komponente und $X^2 \circ X^2$ diejenigen Elemente $(x_1, x_2) \in X^2 \times X^2$, für die $\pi_2(x_1) = \pi_1(x_2)$. Mit anderen Worten, $X^2 \circ X^2 = \{[(x, y), (y, z)], x, y, z \in X\}$. Sei nun $P \circ P$ die Einschränkung von $P \otimes P$ auf $X^2 \circ X^2$.

Definition 3.1 [\mathbb{C}_* -Gruppoid]: Ein \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel $\pi : P \rightarrow X^2$ mit einer assoziativen \mathbb{C}_* -Homomorphismus $\circledast : P \circ P \supset P_{(x,y)} \times P_{(y,z)} \rightarrow P_{(x,z)}$, der also $[(x, y), (y, z)] \mapsto (x, z)$ ($x, y, z \in X$), überlagern soll, ist ein \mathbb{C}_* -Gruppoid.

Man beachte, daß die Definition des Produkts \circledast faserweise vorgenommen wird. Im weiteren wollen wir über eine Bündelabbildung f , welche die Abbildung

$$[(x, y), (y, z)] \mapsto (x, z)$$

überlagert, kurz sagen „ f erfülle die Fußpunktseigenschaft“.

Aus obiger Definition ergibt sich die Konstruktion eines Einselements wie folgt. Aus der Fußpunktseigenschaft erhält man, daß das Einselement ein Schnitt in P

über der Diagonale von X^2 sein muß, denn $P_{(x,y)} \otimes P_{(y,y)} = P_{(x,y)}$ laut Definition. Wählt man also $p \in P_{(x,y)}$ und $q \in P_{(y,y)}$, so ist $p \otimes q = p * c(q, x)$ für ein $c(q, x) \in \mathbb{C}_*$. (Man bedenke, daß $P_{(x,y)} \cong \mathbb{C}_*$.) Setzt man nun $e(q, x) := q * c(q, x)^{-1}$, so bleibt nur noch zu zeigen, daß $e(q, x)$ in Wahrheit nicht von x abhängt. (Da die Gruppoidmultiplikation mit der Strukturgruppenwirkung vertauscht, hängt $e(q, x)$ auch nicht von q ab.)

Wir betrachten demnach nun $s \in P_{(z,y)}$ und erhalten ein $c(q, z)$. Es soll aber \otimes assoziativ sein und deshalb (sei $r \in P_{(z,x)}$ mit $r \otimes q = s * c_2$)

$$\begin{aligned} (r \otimes p) \otimes q &= (s * c_2) \otimes q = s * c(q, z) * c_2 \\ &= r \otimes (p \otimes q) = r \otimes (p * c(q, x)) \\ &= r * c(q, x) \otimes p = s * c(q, x) * c_2 \\ &\Rightarrow c(q, z) = c(q, x) =: c(q) \\ &\Rightarrow e := q * c(q)^{-1}. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Damit haben wir das Einselement konstruiert und sehen, daß P über der Diagonale trivial ist. Es existiert also eine natürliche Identifikation

$$P_{(y,y)} \cong \mathbb{C}_* \quad \forall y \in X.$$

Damit kann man den Begriff der zu $P_{(x,y)}$ inversen (dualen) Faser einführen. Diese muß den Fußpunkt (y, x) haben. Sei nun $p \in P_{(x,y)}$ und $q \in P_{(y,x)}$. Für das Produkt gelte $p \otimes q = e(x) * \tilde{c}(q, y)$. (In den obigen Formeln bezeichnet $*$ die (abelsche) \mathbb{C}_* -Wirkung. Dies wird nachfolgend weggelassen, sofern keine Verwechslungsgefahr besteht.) Damit ergibt sich p^{-1} zu $q \tilde{c}(q, y)^{-1}$. Da das Produkt assoziativ sein soll, kann man zeigen, daß

$$p \otimes q = e_x \iff q \otimes p = e_y,$$

siehe dazu Anhang A. Man sieht außerdem, daß die inverse Faser isomorph zu \mathbb{C}_* ist, wobei aber \mathbb{C}_* jetzt durch Multiplikation mit dem Reziproken wirkt. (Die Rechnung, die analog der zur Konstruktion des Einheitsschnitts verläuft, findet man im Anhang.) Wir schreiben im folgenden $P_{(y,x)}^*$ für die inverse Faser. Jetzt können wir schon ein einfaches Beispiel betrachten.

Beispiel 3.2: Sei

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_* & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & & \downarrow \pi \\ & & X \end{array}$$

ein \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel. $\pi : P \rightarrow X^2$ mit Faser $P_{(x,y)} = \text{Aut}_{\mathbb{C}_*}(Q_x, Q_y)$ (das sind alle \mathbb{C}_* -Homomorphismen von Q_x nach Q_y , die mit der \mathbb{C}_* -Wirkung auf Q vertauschen) ist ein \mathbb{C}_* -Gruppoid mit der Komposition als \circledast . Sind

$$\pi_1 : X^2 \ni (x, y) \rightarrow \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \in X$$

die Projektionen auf die Komponenten, so ist $P \cong \pi_1^*(Q^*) \otimes \pi_2^*(Q)$.

Es gilt das kurze

Lemma 3.3: Jedes \mathbb{C}_* -Gruppoid entsteht auf diese Weise.

Betrachtet man die zu den \mathbb{C}_* -Gruppoiden assoziierten Vektorbündel, so erhält man nichts anderes als komplexe Linienbündel über X^2 .

Zum Beweis des Lemmas fixieren wir ein $x \in X$. Es sei wie üblich mit $P \rightarrow X^2$ das vorgelegte \mathbb{C}_* -Gruppoid bezeichnet. Über die Abbildung $X \ni y \rightarrow (x, y) \in X^2$ verschaffen wir uns Q als pullback von P , faserweise heißt das $Q_y = P_{(x,y)}$. Mittels pullback überträgt sich auch die Multiplikationsstruktur. Es gilt $Q_y^* \otimes Q_z \cong P_{(x,y)}^* \circledast P_{(x,z)} \rightarrow P_{(y,z)}$. \square

Kommen wir nun zu den Gerbes. Eine wichtige Eigenschaft für den obigen Beweis war die Existenz einer Abbildung $y \mapsto (x, y)$ für ein fixiertes x . Faßt man z.B. $X^2 \rightarrow X$ als Submersion auf, so hat man mit jener Abbildung einen globalen Schnitt zur Hand. Letzterer läßt sich aber für beliebige Submersionen nicht immer finden. Solchermaßen gerüstet, schreiten wir nun zum nächsten Abschnitt.

3.2 Gerbes

Definition 3.4 [Murray 1995]: Sei $\pi : Y \rightarrow X$ eine Submersion,

$$Y^{[2]} := \{(y, y') \in Y \times Y \mid \pi(y) = \pi(y')\}.$$

Ein Gerbe (P, Y, X, \circledast) ist ein \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel $P \rightarrow Y^{[2]}$ über einer Submersion $\pi : Y \rightarrow X$ mit einem Produkt $\circledast : P_{(y_1, y_2)} \times P_{(y_2, y_3)} \rightarrow P_{(y_1, y_3)}$, wobei letzteres ein assoziativer \mathbb{C}_* -Bündelhomomorphismus ist, der die Abbildung

$$[(y_1, y_2), (y_2, y_3)] \mapsto (y_1, y_3)$$

überlagert.

Gleich ein Beispiel.

Beispiel 3.5: Sei $Q \rightarrow Y$ ein \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel. $P = \pi_1^*(Q^*) \otimes \pi_2^*(Q)$ ist ein Gerbe. Hier sind π_i wieder die Projektionen auf die Komponenten von $Y^{[2]}$ und, da $\pi_2^*(Q) \otimes \pi_1^*(Q^*) \cong \text{Aut}_{\mathbb{C}_*}(Q_{\pi_1}, Q_{\pi_2})$, die Automorphismenkomposition das Gerbe-Produkt.

Definition 3.6: Im folgenden heißen derartige Gerbes, d.h. Gerbes, zu denen ein \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel Q über Y existiert, die eine Darstellung wie im Beispiel 3.5 erlauben, triviale Gerbes.

Es gilt für Spezialfälle das folgende Lemma über die Eindeutigkeit einer Trivialisierung.

Lemma 3.7: Ist ein Gerbe (P, Y, X, \otimes) trivial, d.h. ist $P = \pi_1^*(Q^*) \otimes \pi_2^*(Q)$, für ein \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel $Q \rightarrow Y$, und ist X kontrahierbar, so ist Q bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Zum Beweis nehme man an, daß zwei \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel $Q \rightarrow Y$ und $\hat{Q} \rightarrow Y$ existieren. Es gilt $\pi_1^*(Q_{y_1}^*) \otimes \pi_2^*(Q_{y_2}) = P_{(y_1, y_2)} = \pi_1^*(\hat{Q}_{y_1}^*) \otimes \pi_2^*(\hat{Q}_{y_2})$. Dies bedeutet aber, daß $\pi_1^*(Q_{y_1}^*) \otimes \pi_2^*(\hat{Q}_{y_1}) = \pi_1^*(\hat{Q}_{y_2}^*) \otimes \pi_2^*(Q_{y_2})$ sich zu einem \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel über X zurückziehen läßt. Da X kontrahierbar sein soll, ist dieses trivial. \square Im Beweis des Lemmas 3.3 über die Standardform von \mathbb{C}_* -Gruppoiden wurde ein Schnitt in X^2 -wenn man $X^2 \rightarrow X$ als Submersion betrachtet - benutzt. Wir zeigen nun den folgenden

Satz 3.8: Sei (P, Y, X, \otimes) ein Gerbe. Ist $s: X \rightarrow Y$ ein globaler Schnitt, so ist P trivial.

Dieser Satz stellt also den Bezug zum ersten Teil dieses Kapitels her. Hier folgt nun der Beweis in zwei Schritten. Definiere ein \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel Q über Y als pullback von P unter dem Schnitt $y \mapsto (y, s(\pi(y)))$, mit anderen Worten $Q_y = P_{(y, s(\pi(y)))}$. Es ergibt sich somit für y_1, y_2 aus einer Faser von Y ($\pi(y_1) = \pi(y_2)$)

$$\begin{aligned} Q_{y_1} \otimes Q_{y_2} &\cong P_{(y_1, \underbrace{s(\pi(y_1))}_{s(\pi(y_2))})} \otimes P_{(y_2, s(\pi(y_2)))} \\ &= P_{(y_1, s(\pi(y_2)))} \otimes P_{(s(\pi(y_2)), y_2)} \\ &= P_{(y_1, y_2)} \\ &\Rightarrow P_{(y_1, y_2)} \cong \text{Aut}_{\mathbb{C}_*}(Q_{y_1}, Q_{y_2}). \end{aligned}$$

\square

(Zum Rechnen mit \otimes findet der Leser im Anhang Details.)

Folgerung: \mathbb{C}_* -Gruppoiden sind als Gerbe trivial.

3.3 Gerbes über G -Hauptfaserbündeln

Es sei bis zum Ende des Kapitels Gruppenerweiterung einer Gruppe G um eine (abelsche) Gruppe K gegeben durch folgende exakte Sequenz von Gruppenhomomorphismen:

$$1 \rightarrow \mathbb{C}_* \xrightarrow{\iota} \hat{G} \xrightarrow{p} G \rightarrow 1 \quad (3.3.2)$$

Zentrale Erweiterung bedeutet noch zusätzlich, daß $\iota(\mathbb{C}_*)$ im Zentrum von \hat{G} liegt. Sei außerdem $\pi : Y \rightarrow X$ ein G -Hauptfaserbündel. Es existiert dann eine kanonische Konstruktionsvorschrift für ein Gerbe $P \rightarrow Y^{[2]}$. Sei dazu

$$P_{(x,y)} := \{ h \in \hat{G} \mid x * p(h) = y \}, \quad (3.3.3)$$

wobei x und y Punkte aus ein und derselben Faser in Y und $*$ die Wirkung von G auf Y sind.

Lemma 3.9: *Mit der über die Einbettung ι definierten Wirkung von \mathbb{C}_* auf \hat{G} sowie der Gruppenoperation in \hat{G} als Produkt \otimes ist $P \rightarrow Y^{[2]}$ ein Gerbe.*

Dies sieht man wie folgt ein:

Da $p : \hat{G} \rightarrow G$ surjektiv ist (Exaktheit von (3.3.2)) und G auf Fasern von Y transitiv operiert, ist $P_{(x,y)} \neq \emptyset$ für alle $(x,y) \in Y^{[2]}$. Da $p^{-1}(e_G) = \iota(\mathbb{C}_*) \cong \mathbb{C}_*$, wirkt \mathbb{C}_* auf $P_{(x,x)}$ frei. Sei $x, y \in Y$ mit $x * g = y$ für ein $g \in G$ und $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \in \hat{G}$ mit

$$p(\tilde{g}_1) = p(\tilde{g}_2) = g,$$

dann ist (da p Homomorphismus sein soll)

$$p(\tilde{g}_1 \tilde{g}_2^{-1}) = e_G,$$

und wegen der Exaktheit von (3.3.2) gilt

$$\tilde{g}_1 \tilde{g}_2^{-1} \in \iota(\mathbb{C}_*).$$

Also ist auch $P_{(x,y)} \cong \mathbb{C}_*$, und \mathbb{C}_* operiert frei auf jeder Faser. Das Gerbe-Produkt erhält man aus der Gruppenmultiplikation in \hat{G} , da $\iota(\mathbb{C}_*)$ im Zentrum liegt. \square

Für einfach zusammenhängende Gruppen G werden wir im folgenden eine Konstruktionsvorschrift für eine Gruppenerweiterung der Art (3.3.2) angeben:

Sei (P, Y, X, \otimes) ein Gerbe, wobei $Y \rightarrow X$ ein G -Hauptfaserbündel darstellt. Zunächst fixieren wir ein y_0 in Y_{x_0} , einer der Faser über x_0 . Es existiert dann eine lokale Trivialisierung

$$\chi : Y_{x_0} \rightarrow G \text{ mit } \chi(y_0) = e. \quad (3.3.4)$$

Sei \hat{G} die Menge aller Fasern $P_{(y_0, y)}$ für alle y aus Y_x ,

$$\hat{G} := \bigcup_{g \in G} P_{(y_0, y_0 * g)}; \hat{e} := e_{y_0}. \quad (3.3.5)$$

Mit dieser Identifizierung kann man nun einen \mathbb{C}_* -Bündelhomomorphismus $\hat{\chi} : P|_{Y_x} \rightarrow \hat{G}$ mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

1. $\hat{\chi}|_{\hat{G}} = id|_{\hat{G}}$
2. $\hat{\chi}(e_y) = \hat{e} \quad \forall y \in Y_x$
3. $\hat{\chi}(P_{(y_0 * g, y_0 * g * g')}) = \hat{\chi}(P_{(y_0, y_0 * g')}) = P_{(y_0, y_0 * g')} \quad \forall g, g' \in G$

für ein fixiertes y_0 aus Y_x . e_y ist dabei der Einschnitt, konstruiert in Abschnitt (3.1).

Bemerkung: Da G einfach zusammenhängend sein soll, sind Fasern Y_x kontrahierbar. Man kann also einen Schnitt

$$k : G^2 (\cong Y_x^2) \rightarrow P|_{Y_x}$$

mit den Eigenschaften $k(g_1, g_2) = k(g_2, g_1)^{-1}$ und $k(g, g) = e_{y_0 * g}$ finden. Hier ist k^{-1} das Inverse zu k im Gerbesinn, die Trivialisierung $Y_x \cong G$ gewählt bezüglich eines fixierten Punktes y_0 und $e_{(\cdot)}$ der Eins-Schnitt in $P|_{Y_x}$.

Dann ist für $\hat{g}_1 \in P_{(y_0 * g, y_0 * (g * g_1))}$ eine Abbildung, die Eigenschaften 1) bis 3) erfüllt, gegeben durch

$$\hat{g}_1 \mapsto k(e, g) \otimes \hat{g}_1 \otimes k(g * g_1, g_1) \in P_{(y_0, y_0 * g_1)}.$$

Sei y_0 fixiert, χ eine Trivialisierung der Faser Y_x mit $\chi(y_0) = e$ und π_i die Projektion von P auf die i -te Komponente des Fußpunkts, z.B.

$$\pi_1(P_{(y, y')}) = y.$$

Dann ist eine Abbildung $\hat{\chi}$ gegeben durch

$$\hat{\chi} : P_{(y_0 * g, y_0 * (g * g_1))} \rightarrow P_{(y_0, y_0 * g_1)},$$

$$\hat{g}_1 \mapsto k(e, \chi[\pi_1(\hat{g}_1)]) \otimes \hat{g}_1 \otimes k(\chi[\pi_2(\hat{g}_1)], \chi[\pi_1(\hat{g}_1)]^{-1} \cdot \chi[\pi_2(\hat{g}_1)]).$$

Diese Abbildung erfüllt speziell auch Eigenschaft (2), da

$$k(e, g) \otimes e_{y_0 * g} \otimes k(g, e) = k(e, g) \otimes k(g, e) = e_{y_0}$$

gilt.

Mit dem bisher konstruierten hat man auch eine Projektion $p : \hat{G} \rightarrow G$ zur Hand:

$$p(\hat{g}) := (\chi(\pi_1(\hat{g}))) \cdot (\chi(\pi_2(\hat{g})))^{-1}.$$

Nun kann man eine Gruppenmultiplikation auf \hat{G} definieren, die vom Gerbeprodukt \otimes vererbt wird:

Definition 3.10 [Gruppenmultiplikation in \hat{G}]:

Sei $y_0 \in Y$, $\hat{g}_1 \in P_{(y_0, y_0 * g_1)}$, $\hat{g}_2 \in P_{(y_0 * g_1, y_0 * g_1 * g_2)}$ mit $p(\hat{g}_1) =: g_1$ und $p(\hat{g}_2) =: g_2$.

Dann ist die Gruppenmultiplikation \cdot definiert durch

$$\hat{\chi}(\hat{g}_1) \cdot \hat{\chi}(\hat{g}_2) := \hat{\chi}(\hat{g}_1 \otimes \hat{g}_2).$$

Damit ergibt sich für $c_1, c_2 \in \mathbb{C}_*$:

$$\begin{aligned} (\hat{\chi}(\hat{g}_1) * c_1) \cdot (\hat{\chi}(\hat{g}_2) * c_2) &= \hat{\chi}(\hat{g}_1 * c_1) \cdot \hat{\chi}(\hat{g}_2 * c_2) \\ &= \hat{\chi}((\hat{g}_1 * c_1) \otimes (\hat{g}_2 * c_2)) \\ &= \hat{\chi}(\hat{g}_1 \otimes \hat{g}_2 * (c_1 \cdot c_2)) \\ &= \hat{\chi}(\hat{g}_1 \otimes \hat{g}_2) * (c_1 \cdot c_2) \end{aligned}$$

Man sieht also, daß die Gruppenoperation ein \mathbb{C}_* -Homomorphismus ist. Weiterhin sieht man ein, daß $P_{(y_0, y_0)} \cong \mathbb{C}_*$ das Bild von \mathbb{C}_* unter der Einbettung ι ist (speziell bildet ι per Definition die jeweiligen Einselemente aufeinander ab, $\iota : 0 \mapsto \hat{e}$).

Lemma 3.11: Die Multiplikation \cdot hängt nicht von der Wahl von y_0 ab.

Seien $\hat{g}'_1 \in P_{(y_0 * g'', y_0 * g'' * g_1)}$ und $\hat{g}'_2 \in P_{(y_0 * g'' * g_1, y_0 * g'' * g_1 * g_2)}$. Wegen Eigenschaft (3) ist

$$\hat{\chi}(\hat{g}'_i) = \hat{\chi}(\hat{g}_i) * c_i \text{ für } i = 1, 2 \text{ und } c_i \in \mathbb{C}_*.$$

Weiterhin ist $\hat{g}'_1 \otimes \hat{g}'_2 \in P_{(y_0 * g'', y_0 * g'' * g_1 * \hat{g}'_2)}$, also muß

$$\hat{\chi}(\hat{g}'_1 \otimes \hat{g}'_2) = \hat{\chi}(\hat{g}_1 \otimes \hat{g}_2) * c_{12}$$

gelten für ein $c_{12} \in \mathbb{C}_*$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{\chi}(\hat{g}'_1) \cdot \hat{\chi}(\hat{g}'_2) &:= \hat{\chi}(\hat{g}_1 * c_1) \cdot \hat{\chi}(\hat{g}_2 * c_2) \\ &= (\hat{\chi}(\hat{g}_1) \cdot \hat{\chi}(\hat{g}_2)) * (c_1 \cdot c_2) \\ &= \hat{\chi}(\hat{g}_1 \otimes \hat{g}_2) * (c_1 \cdot c_2) \end{aligned}$$

und andererseits nach der Definition (3.10)

$$\hat{\chi}(\hat{g}'_1) \cdot \hat{\chi}(\hat{g}'_2) := \hat{\chi}(\hat{g}'_1 \otimes \hat{g}'_2) = \hat{\chi}(\hat{g}_1 \otimes \hat{g}_2) * c_{12}$$

also

$$c_{12} = c_1 \cdot c_2.$$

Speziell folgt somit aus $\hat{\chi}(\hat{g}'_i) = \hat{\chi}(\hat{g}_i)$ für $i = 1, 2$, d.h. für $c_i = 1$:

$$\hat{\chi}(\hat{g}'_1 \otimes \hat{g}'_2) = \hat{\chi}(\hat{g}_1 \otimes \hat{g}_2).$$

□

Unter Ausnutzung der Assoziativität von \otimes zeigt man nun auch, daß \cdot assoziativ ist. Sei dazu

$$\hat{g}_1 \in P_{(y_0, y_0 * g_1)}; \hat{g}_2 \in P_{(y_0 * g_1, y_0 * g_1 * g_2)}; \hat{g}_3 \in P_{(y_0 * (g_1 * g_2), y_0 * (g_1 * g_2 * g_3))}$$

und

$$\hat{\xi} := \hat{g}_1 \otimes \hat{g}_2 \in P_{(y_0, y_0 * (g_1 * g_2))}; \hat{\eta} := \hat{g}_2 \otimes \hat{g}_3 \in P_{(y_0 * (g_1 * g_2), y_0 * (g_1 * g_2 * g_3))}$$

dann gilt

$$\begin{aligned} (\hat{\chi}(\hat{g}_1) \cdot \hat{\chi}(\hat{g}_2)) \cdot \hat{\chi}(\hat{g}_3) &= \hat{\chi}(\hat{\xi}) \cdot \hat{\chi}(\hat{g}_3) \\ &= \hat{\chi}(\hat{\xi} \otimes \hat{g}_3) \\ &= \hat{\chi}(\hat{g}_1 \otimes \hat{g}_2 \otimes \hat{g}_3) \\ &= \hat{\chi}(\hat{g}_1 \otimes \hat{\eta}) \\ &= \hat{\chi}(\hat{g}_1) \cdot \hat{\chi}(\hat{\eta}) = \hat{\chi}(\hat{g}_1) \cdot (\hat{\chi}(\hat{g}_2) \cdot \hat{\chi}(\hat{g}_3)). \end{aligned}$$

Sei im folgenden

$$P_{y_0 * g} := \bigcup_{g' \in G} P_{(y_0 * g, y_0 * (g \cdot g'))} \quad (3.3.6)$$

Lemma 3.12: $\hat{\chi}|_{P_{y_0 * g}} : P_{y_0 * g} \rightarrow \hat{G}$ ist ein \mathbb{C}_* -Isomorphismus für alle $g \in G$.

▲ $\hat{\chi}|_{P_{y_0 * g}}$ ist surjektiv, da G frei und transitiv auf Fasern von Y operiert. Andernfalls gäbe es ein $g' \in G$ und ein $p \in P_{(y_0, y_0 * g')} \subset \hat{G}$, für das kein Urbild unter $\hat{\chi}|_{P_{y_0 * g}}$ existierte. Aber $P_{(y_0 * g, y_0 * (g \cdot g'))} \subset P_{y_0 * g}$ erfüllt laut Definition von $\hat{\chi}$

$$\hat{\chi}(P_{(y_0 * g, y_0 * (g \cdot g'))}) = P_{(y_0, y_0 * g')}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt, weil $\hat{\chi}$ ein \mathbb{C}_* -Homomorphismus ist.

▲ $\hat{\chi}|_{P_{y_0 * g}}$ ist injektiv, weil $\hat{\chi}$ als \mathbb{C}_* -Homomorphismus zwischen \mathbb{C}_* -isomorphen Fasern abbildet.

Satz 3.13: Sei $y_0 \in Y_x$ wie in den Eigenschaften (1-3) und $g_0 \in G$. Sei $y'_0 = y_0 * g_0$, \hat{G}' und $\hat{\chi}'$ wie in den obigen Definitionen (3.3.5) und (1-3), jedoch für y'_0 . Dann existiert ein \hat{G} -Isomorphismus $\beta : \hat{G} \rightarrow G$, der

$$\hat{\chi}'(\hat{g}) = \beta(\hat{\chi}(\hat{g}))$$

erfüllt.

▲ Wähle

$$\beta := \left(\hat{\chi} \upharpoonright_{P_{y_0 * g_0}} \right)^{-1}$$

β ist nach Lemma (3.12) \mathbb{C}_* -Isomorphismus.

▲ Es gilt weiter

$$\begin{aligned} \beta(\hat{\chi}(g_1)) \cdot \beta(\hat{\chi}(g_2)) &= \hat{\chi}'(g_1) \cdot \hat{\chi}'(g_2) \\ &:= \hat{\chi}'(g_1 \otimes g_2) = \beta(\hat{\chi}(g_1 \otimes g_2)) \\ &= \beta(\hat{\chi}(g_1) \cdot \hat{\chi}(g_2)). \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Bemerkung Auch wenn die Faser von Y kontrahierbar ist, folgt nicht die Trivialität des Gerbes (P, Y, X, \otimes) . Eine hinreichende Bedingung war, daß ein Schnitt

$$s : X \rightarrow Y$$

vorliegt (siehe Satz (3.8)). Da $Y \rightarrow X$ Hauptfaserbündel war, impliziert die Trivialität von $(Y, X, G, *)$ im Hauptfaserbündelsinn die Trivialität im Gerbesinn von (P, Y, X, \otimes) .

Definition 3.14: Sei $\pi : Y \rightarrow X$ ein G -Hauptfaserbündel und (3.3.2) eine zentrale Erweiterung. Wir sagen „ Y hat einen Lift zu einem \hat{G} -Hauptfaserbündel“. \iff Es gibt ein \hat{G} -Hauptfaserbündel $\hat{\pi} : \hat{Y} \rightarrow X$ und einen \hat{G} -Bündelhomomorphismus $q : \hat{Y} \rightarrow Y$, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_* & \xrightarrow{l} & \hat{G} \circlearrowleft \hat{Y} \\ & & \downarrow p \quad \downarrow q \\ & & G \circlearrowleft Y \\ & & \downarrow \pi \\ & & X \end{array} \quad (3.3.7)$$

Dabei stehen \circlearrowleft für die jeweilige Gruppenwirkung und senkrechte Pfeile für Projektionen entlang der Fasern.

Mit den getroffenen Vereinbarungen und der Konstruktion des Gerbes $P \rightarrow Y^{[2]}$ gilt

Satz 3.15: *Sei G einfach zusammenhängend. Y hat einen Lift zu einem \hat{G} -Hauptfaserbündel genau dann, wenn P trivial ist.*

„ \Leftarrow “ Sei P trivial, d.h. $P_{(x,y)} \cong \text{Aut}_{\mathbb{C}_*}(Q_x, Q_y)$ für ein \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel $q : Q \rightarrow Y$. Da G einfach zusammenhängend ist und frei und transitiv auf jeder Faser $Y_x = \pi^{-1}(x)$ ($x \in X$) operiert, ist jedes Y_x kontrahierbar. Es folgt, daß die Einschränkung $Q_x := Q|_{Y_x} \rightarrow Y_x$ trivial ist. Sei nun

$$\hat{\pi}(\hat{y}) := \pi(q(\hat{y})), \hat{y} \in Q,$$

$$\hat{Y}_x := \hat{\pi}^{-1}(x) \cong Y_x \times \mathbb{C}_*$$

und

$$\hat{Y} := \bigcup_{x \in X} \hat{Y}_x.$$

Zu zeigen ist, daß

$$(X, \hat{Y}, \hat{G}, *, \{\kappa_\alpha\})$$

ein Hauptfaserbündel ist.

▲ \hat{G} operiert transitiv auf $\hat{Y}_x \forall x$:

Sei $\hat{y}_1, \hat{y}_2 \in \hat{Y}_x$, dann gilt

$$\pi(q(\hat{y}_1)) = \pi(q(\hat{y}_2))$$

und folglich existiert ein $g \in G$, das $q(\hat{y}_1)$ auf $q(\hat{y}_2)$ abbildet,

$$q(\hat{y}_1) * g = q(\hat{y}_2).$$

Aus der Exaktheit von (3.3.2), speziell der Surjektivität von p , folgt, daß man ein $\hat{g}' \in \hat{G}$ findet mit $p(\hat{g}') = g$. \hat{g}' definiert aber ein Element aus $P_{(q(\hat{y}_1), q(\hat{y}_2))} \cong \text{Aut}_{\mathbb{C}_*}(Q_{(q(\hat{y}_1))}, Q_{(q(\hat{y}_2))})$, also ist

$$\hat{g}'(\hat{y}_1) = \hat{y}_2 * c.$$

Wählt man nun

$$\hat{g} := \hat{g}' \iota(c^{-1}),$$

so ergibt sich

$$\hat{g}(\hat{y}_1) = \hat{y}_2.$$

▲ \hat{G} operiert frei, weil das Einselement einer Gruppe eindeutig ist.

▲ Wir zeigen nun, daß es für \hat{Y} , als Faserung über X , lokale Trivialisierungen gibt, bei denen die Übergangsabbildungen die nötigen Anschlußbedingungen erfüllen. Damit ist $\hat{Y} \rightarrow X$ ein \hat{G} -Hauptfaserbündel.

Zu diesem Ende bemerke man, daß für Gruppenerweiterungen

$$1 \rightarrow K \rightarrow \hat{G} \xrightarrow{p} G \rightarrow 1,$$

bei denen K endlichdimensional und zusammenhängend und G einfach zusammenhängend ist, immer eine injektive Abbildung $s : G \rightarrow \hat{G}$ existiert, die $\pi(s(\cdot)) = \text{id}_G(\cdot)$ erfüllt, siehe [3]. s ist aber im allgemeinen kein Homomorphismus, es gilt vielmehr $s(g, h) = \omega(g, h)s(g)s(h)$, wobei ω Werte in K liefert. Man normiert nun $s(e) = \hat{e}$, wobei e bzw. \hat{e} die Einheiten in G bzw. \hat{G} darstellen. Die Forderung nach Assoziativität ergibt (vergleiche die Rechnungen im Anhang C.1)

$$\omega(gh, k)\omega(g, h) = \omega(g, hk)\omega(h, k). \quad (3.3.8)$$

Da $Y \rightarrow X$ ein G -Hauptfaserbündel ist, existieren offene Überdeckungen U_α von X und lokale Trivialisierungen $\kappa_\alpha : Y_\alpha \rightarrow G$ mit Übergangsabbildungen $\sigma_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$, $\kappa_\beta = \sigma_{\alpha\beta} \kappa_\alpha$. Letztere erfüllen

$$\sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\beta\alpha} = e = \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\beta\gamma} \sigma_{\gamma\alpha}. \quad (3.3.9)$$

Sei $\{U_\alpha\}$ so gewählt, daß jedes U_α kontrahierbar ist. Dann ist $Y_\alpha := Y|_{U_\alpha}$ trivial und es gilt

$$Y_\alpha \cong U_\alpha \times G.$$

Damit ergibt sich¹

$$\hat{Y}_\alpha := Y|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \hat{G} \cong U_\alpha \times G \rtimes \mathbb{C}_*.$$

Man findet also lokal eine Abbildung

$$\hat{\kappa}_\alpha : \hat{Y}_\alpha \rightarrow \hat{G} \cong G \rtimes \mathbb{C}_*.$$

¹ \rtimes steht für das semidirekte Produkt zweier Gruppen. Bei diesem ist die Gruppenmultiplikation zweier Elemente aus $A \rtimes B$ definiert durch

$$[a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] = [a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot a_1(b_2)].$$

Siehe zum Beispiel [20], S. 651.

Sei χ_α die lokale Trivialisierung von $Q_\alpha := Q|_{Y_\alpha}$ mit Übergangsfunktionen $\psi_{\alpha\beta}$. Letztere soll als konstant über jeder Faser von Y_α gewählt sein.

Mit $\hat{\pi}$ haben wir schon eine Projektion $\hat{Y} \rightarrow X$ zur Hand. Über U_α definieren wir nun durch $\hat{\kappa}_\alpha := s\kappa_\alpha$ eine Trivialisierung von \hat{Y} über U_α für alle offenen Mengen der Überdeckung von X . $\hat{\kappa}_\alpha$ ist damit eine Abbildung $\hat{Y}_\alpha \rightarrow \hat{G}$. Mit diesen lokalen Trivialisierungen läßt sich also ein $y \in \hat{\pi}^{-1}(U_\alpha)$ als ein Element aus \hat{G} darstellen,

$$\hat{\kappa}(\hat{y}) = \iota(\chi_\alpha(\hat{y})) s(\kappa_\alpha(q(\hat{y}))).$$

Ist nun dieses \hat{y} gleichzeitig in $\hat{\pi}^{-1}(U_\beta)$ für $\alpha \neq \beta$, so kennt man auch die Transformationsformel für $\hat{\kappa}_\alpha$, da man weiß, wie sich κ_α bei Trivialisierungswechsel verhält:

$$\begin{aligned} \hat{\kappa}_\beta(\hat{y}) &= \iota(\chi_\beta(\hat{y})) s(\kappa_\beta(q(\hat{y}))) \\ &= \iota(\psi_{\beta\alpha}\chi_\alpha(\hat{y})) s(\sigma_{\beta\alpha}\kappa_\alpha(q(\hat{y}))) \\ &= \iota(\psi_{\alpha\beta}) \omega\{\sigma_{\beta\alpha}, \kappa_\alpha(q(\hat{y}))\} \\ &\quad \iota(\chi_\alpha(\hat{y})) s(\sigma_{\beta\alpha}) s(\kappa_\alpha(q(\hat{y}))) \\ &= \iota(\psi_{\alpha\beta}) \omega\{\sigma_{\beta\alpha}, \kappa_\alpha(q(\hat{y}))\} \hat{\kappa}_\alpha(\hat{y}) \\ &=: \hat{\sigma}_{\beta\alpha} \hat{\kappa}_\alpha(\hat{y}). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die neuen Übergangsabbildungen für \hat{Y} eingeführt:

$$\hat{\sigma}_{\beta\alpha}(\hat{y}) := \iota(\psi_{\alpha\beta}) \omega\{\sigma_{\beta\alpha}, \kappa_\alpha(q(\hat{y}))\}. \quad (3.3.10)$$

Lemma 3.16: $\hat{\sigma}_{\beta\alpha}$ ist wohldefiniert, d.h. hängt nur vom Fußpunkt $\hat{\pi}(\hat{y})$ ab.

Beweis Sei $\hat{y}_2 = \hat{y} * \hat{g}$ für ein \hat{g} aus \hat{G} . Setzt man dies in obige Formel ein, so rechnet man nach (unter Benutzung von $q(\hat{y}) =: y$, $p(\hat{g}) =: g$)

$$\begin{aligned} \hat{\kappa}_\beta(\hat{y}_2) &= \iota(\psi_{\alpha\beta}(\hat{\pi}(\hat{y}_2))) \omega\{\sigma_{\beta\alpha}(\hat{\pi}(\hat{y}_2)), \kappa_\alpha(q(\hat{y}_2))\} \\ &\quad \iota(\chi_\alpha(\hat{y}_2)) s(\sigma_{\beta\alpha}(\hat{\pi}(\hat{y}_2))) s(\kappa_\alpha(q(\hat{y}_2))) \\ &= \iota(\psi_{\alpha\beta}(\hat{\pi}(\hat{y} * \hat{g}))) \omega\{\sigma_{\beta\alpha}(\hat{\pi}(\hat{y} * \hat{g})), \kappa_\alpha(q(\hat{y} * \hat{g}))\} \\ &\quad \iota(\chi_\alpha(\hat{y} * \hat{g})) s(\sigma_{\beta\alpha}(\hat{\pi}(\hat{y} * \hat{g}))) s(\kappa_\alpha(q(\hat{y} * \hat{g}))) \\ &= \iota(\psi_{\alpha\beta}(\pi(y))) \omega\{\sigma_{\beta\alpha}(\pi(y)), \kappa_\alpha(y * g)\} \iota(\chi_\alpha(\hat{y})) \\ &\quad s(\sigma_{\beta\alpha}(\pi(y))) s(\kappa_\alpha(y * g)) \\ &= \iota(\psi_{\alpha\beta}(\pi(y))) \omega\{\sigma_{\beta\alpha}(\pi(y)), \kappa_\alpha(y)g\} \iota(\chi_\alpha(\hat{y})) \\ &\quad s(\sigma_{\beta\alpha}(\pi(y))) \omega\{\kappa_\alpha(y), g\} s(\kappa_\alpha(y)) s(g). \end{aligned}$$

Für die linke Seite ergibt sich aber

$$\begin{aligned}\hat{\kappa}_\beta(\hat{y}_2) &= \hat{\kappa}_\beta(\hat{y} * \hat{g}) \\ &= \iota(\chi_\beta(\hat{y} * \hat{g})) s(\kappa_\beta(y * g)) \\ &= \hat{\kappa}_\beta(\hat{y}) \omega\{\kappa_\beta(y), g\} s(g).\end{aligned}$$

Gleichsetzung beider Seiten und Vergleich mit (3.3.10) liefert

$$\begin{aligned}\omega\{\sigma_{\alpha\beta}(\hat{\pi}(\hat{y})), g\} &= \omega\{\sigma_{\beta\alpha}(\hat{\pi}(\hat{y})), \kappa_\alpha(q(\hat{y}))g\} \omega\{\kappa_\alpha(q(\hat{y})), g\} \\ &\quad \omega\{\sigma_{\beta\alpha}, \kappa_\alpha(q(\hat{y}))\}^{-1}.\end{aligned}$$

Dies ist aber Formel (3.3.8). □

Es bleibt also nur noch, das sich anschließende Lemma zu prüfen.

Lemma 3.17: *Gegeben sei eine Überdeckung $\{U_\alpha\}$ von X , die zum Bündel $Y \rightarrow X$ assoziiert war und Indizes α, β, γ mit $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$. Definiert man weiter $\{\hat{\sigma}_{\alpha\beta}\}$ wie in (3.3.10), so gilt*

$$\hat{\sigma}_{\alpha\beta} \hat{\sigma}_{\beta\gamma} \hat{\sigma}_{\gamma\alpha} = \hat{e}.$$

Dazu bemerke man zuerst, daß ι ein Homomorphismus ist und ins Zentrum von \hat{G} abbildet. Man muß also nur den zweiten Faktor in (3.3.10) prüfen. Es gilt zunächst

$$\begin{aligned}s(\kappa_\alpha) &= s(e \kappa_\alpha) \stackrel{(3.3.9)}{=} s(\sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\beta\gamma} \sigma_{\gamma\alpha} \kappa_\alpha) \\ &= \omega(\sigma_{\alpha\beta}, \underbrace{\sigma_{\beta\gamma} \sigma_{\gamma\alpha} \kappa_\alpha}_{=\kappa_\beta}) s(\sigma_{\alpha\beta}) \omega(\sigma_{\beta\gamma}, \underbrace{\sigma_{\gamma\alpha} \kappa_\alpha}_{=\kappa_\beta}) s(\sigma_{\beta\gamma}) \omega(\sigma_{\gamma\alpha}, \kappa_\alpha) s(\sigma_{\gamma\alpha}) s(\kappa_\alpha).\end{aligned}$$

Wobei das letzte Gleichheitszeichen durch wiederholte Anwendung von (3.3.8) folgt. Vergleicht man nun rechte und linke Seite, so ergibt sich die Formel

$$\omega(\sigma_{\alpha\beta}, \kappa_\beta) s(\sigma_{\alpha\beta}) \omega(\sigma_{\beta\gamma}, \kappa_\beta) s(\sigma_{\beta\gamma}) \omega(\sigma_{\gamma\alpha}, \kappa_\alpha) s(\sigma_{\gamma\alpha}) = \hat{e}. \quad (3.3.11)$$

Dies ist aber das Lemma, womit wir alle notwendigen Eigenschaften gesammelt haben, die $\hat{Y} \rightarrow X$ zu einem \hat{G} -Hauptfaserbündel machen. Das beendet die eine Richtung des Beweises.

„ \Rightarrow “ Es bezeichne $\hat{\pi} : \hat{Y} \rightarrow X$ ein \hat{G} -Hauptfaserbündel, $q : \hat{Y} \rightarrow Y$ eine Abbildung wie in (3.3.7) und

$$\hat{Y}_y := \{\hat{y} \in \hat{Y} \mid q(\hat{y}) = y\}.$$

▲ $q : \hat{Y} \rightarrow Y$ ist \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel:

Sei $\hat{g} \in \hat{G}$ mit $p(\hat{g}) = e_G$. Dann ist $\hat{g} \in \iota(\mathbb{C}_*)$. \hat{g} operiert auf \hat{Y} und überlagert wegen

der Kommutativität von (3.3.7) die identische Abbildung auf Y . $\iota(\mathbb{C}_*) \cong \mathbb{C}_*$ wirkt also auf \hat{Y}_y , $\forall y \in Y$. Sei $\hat{y}_1, \hat{y}_2 \in \hat{Y}_y$. Da

$$\hat{\pi}(\hat{y}_1) = \pi(p(\hat{y}_1)) = \pi(p(\hat{y}_2)) = \hat{\pi}(\hat{y}_2),$$

gibt es ein $\hat{g} \in \hat{G}$ mit $\hat{y}_1 * \hat{g} = \hat{y}_2$. Es ist $\hat{g} \in \iota(\mathbb{C}_*)$. Also operiert \mathbb{C}_* frei (da die \hat{G} -Wirkung frei ist) und transitiv auf \hat{Y}_y . Mit einem ähnlichen Argument wie im ersten Teil des Beweises zeigt man nun, daß lokale Trivialisierungen existieren, die sich entsprechend verkleben lassen.

▲ $P_{(x,y)} \cong \text{Aut}_{\mathbb{C}_*}(\hat{Y}_x, \hat{Y}_y)$:

Sei $\hat{g} \in P_{(x,y)}$ und $\hat{y} \in \hat{Y}_x$. Dann ist

$$q(\hat{y} * \hat{g}) = q(\hat{y}) * p(\hat{g}) = x * p(\hat{g}) = y.$$

Andererseits gilt für alle $c \in \mathbb{C}_*$, wenn man sie auf \hat{Y}_x bzw. auf \hat{Y}_y wirken läßt

$$(\hat{y} * c) * \hat{g} = \hat{y} * (\iota(c)\hat{g}) = \hat{y} * (\hat{g})\iota(c) = \hat{y} * \hat{g} * c,$$

denn die \mathbb{C}_* -Wirkung war ja gerade aus der Wirkung von \hat{G} konstruiert. Damit definiert \hat{g} ein Element aus $\text{Aut}_{\mathbb{C}_*}(\hat{Y}_x, \hat{Y}_y)$. Sei $\hat{a} \in \text{Aut}_{\mathbb{C}_*}(\hat{Y}_x, \hat{Y}_y)$, d.h. $\hat{a} \in \hat{G}$ (wobei man hier den Unterschied zwischen der Abbildung \hat{a} und dem Element aus \hat{G} , das \hat{a} definiert, unterdrückt). \hat{a} überlagert $a := p(\hat{a})$. Folglich ist $\hat{a} \in P_{(x,y)}$. Zusammenfassend erhält man die Behauptung und damit die Trivialität von P . \square

Bemerkungen:

1) Ist $s : X \rightarrow Y$ ein globaler Schnitt, so ist $Y \rightarrow X$ triviales Hauptfaserbündel und auch das Gerbe $P \rightarrow Y^{[2]}$ trivial. Also existiert $\hat{Y} \rightarrow X$, welches trivial ist für einfach zusammenhängendes G .

2) Ein Bündel $Y \rightarrow X$ wird durch seine Übergangsabbildungen

$$\sigma_{\alpha\beta} \text{ mit } e = \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\beta\gamma} \sigma_{\gamma\alpha}$$

charakterisiert. Die Frage, ob Y einen Lift zu einem \hat{G} -Hauptfaserbündel besitzt, führt auf das Problem, ob die $\sigma_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ sich zu Abbildungen $\hat{\sigma}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \hat{G}$ liften lassen, die $\hat{\sigma}_{\alpha\beta} \hat{\sigma}_{\beta\gamma} \hat{\sigma}_{\gamma\alpha} = \hat{e}$ erfüllen. Allgemein ist dies jedoch nicht der Fall, es gilt nur $\hat{\sigma}_{\alpha\beta} \hat{\sigma}_{\beta\gamma} \hat{\sigma}_{\gamma\alpha} = \hat{g}_{\alpha\beta\gamma}$ für eine 3-Form $g_{\alpha\beta\gamma} : U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \rightarrow \mathbb{C}_*$. Wie man sich leicht überzeugt, ist $g \in \check{H}^2(X, \mathbb{C}_*)$, der Čech-Kohomologie der Garbe der Keime glatter \mathbb{C}_* -Funktionen über X , wenn man zusätzlich den Limes immer feinerer Überdeckungen betrachtet (siehe zum ersten Punkt die Beweistechnik im folgenden Kapitel). Mit den sich anschließenden Lemmata folgt sofort

$$\check{H}^2(X, \mathbb{C}_*) \cong \check{H}^3(X, \mathbb{Z}).$$

Das Bild g der Klasse $[g]$ unter diesem Isomorphismus heißt Dixmier-Douady-Klasse von X .

Lemma 3.18: $1 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \mathbb{C} \xrightarrow{e} \mathbb{C}_* \rightarrow 1$ ist exakt.

Die Abbildung ι ist die Einbettung $\iota : z \mapsto 2\pi iz$, während man e als $e : z \mapsto e^z$ wählt. \square

Lemma 3.19: Es gilt $\check{H}^*(X, \mathbb{C}) = 0$.

Der detaillierte Beweis findet sich im Anhang. Es sei hier nur kurz bemerkt, daß die Garbe der (Keime der) glatten \mathbb{C} -wertigen Funktionen eine sogenannte feine Garbe ist. \mathbb{C} -wertige Funktionen erlauben in der Definition des Randoperators der Kohomologie eine Gruppenwirkung, die die einfache Zahlenmultiplikation ist. Damit lassen sich lokale Überdeckungen angeben, bei denen die Čech-Kohomologie über den einzelnen offenen Mengen verschwindet. Die Elemente aus diesen Kohomologien lassen sich dann unter Verwendung einer subordinierten Partition der 1 zu globalen Koketten zusammensetzen. \square

3.4 Die Dixmier-Douady-Klasse eines Gerbes

Sei im folgenden (P, Y, X, \otimes) ein Gerbe. Zur Erinnerung werden hier noch einmal die Symbole diagrammatisch erklärt.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}_* & \xrightarrow{*} & P \\
 & & \downarrow \\
 & & Y^{[2]} \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1} \\ \xrightarrow{\pi_2} \end{array} Y \\
 & & \downarrow \pi \\
 & & X
 \end{array} \tag{3.4.12}$$

Wir wählen weiterhin eine Überdeckung $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ von X , über der Y trivial ist, das heißt, es existiert für jedes α aus \mathcal{I} (\mathcal{I} ist die Indexmenge der Überdeckung) ein Schnitt $s_\alpha : U_\alpha \rightarrow Y$. Auf $U_\alpha \cap U_\beta$ hat man dann

$$(s_\alpha, s_\beta) : U_\alpha \cap U_\beta \ni x \mapsto (s_\alpha(x), s_\beta(x)) \in Y^{[2]}. \tag{3.4.13}$$

Sei nun $P_{\alpha\beta} := (s_\alpha, s_\beta)^* P$ pullback von P unter (3.4.13) mit dem von P übertragenen Produkt \otimes . Wegen $P_{(s_\alpha(x), s_\beta(x))} \otimes P_{(s_\beta(x), s_\gamma(x))} = P_{(s_\alpha(x), s_\gamma(x))}$ gilt

$$P_{\alpha\beta} \otimes P_{\beta\gamma} \cong P_{\alpha\gamma}. \tag{3.4.14}$$

Da die Durchschnitte $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ kontrahierbar sind, findet man einen Schnitt

$$\sigma_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow P_{\alpha\beta}.$$

Aus (3.4.14) erhält man dann

$$\sigma_{\alpha\beta} \circledast \sigma_{\beta\gamma} = \sigma_{\alpha\gamma} * g_{\alpha\beta\gamma}, \quad (3.4.15)$$

für ein Abbildung $g_{\alpha\beta\gamma} : U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \rightarrow \mathbb{C}_*$.

Lemma 3.20: $g_{\alpha\beta\gamma} \in \check{H}^2(X, \mathbb{C}_*)$.

Man sieht leicht ein, daß $(\delta g)_{\alpha\beta\gamma\epsilon} = 0$.

Weiterhin geht $g_{\alpha\beta\gamma}$ bei Vertauschung von Indizes in das Inverse über. Dazu definiert man $\sigma_{\beta\alpha} := \sigma_{\alpha\beta}^{-1}$ (Inverses im Gerbesinn) und es ergibt sich:

$$e = \sigma_{\alpha\beta} \circledast \sigma_{\beta\gamma} \circledast \sigma_{\gamma\alpha} \circledast \sigma_{\alpha\gamma} \circledast \sigma_{\gamma\beta} \circledast \sigma_{\beta\alpha} = g_{\alpha\beta\gamma} \cdot g_{\alpha\gamma\beta}.$$

Nun wird die Unabhängigkeit der Konstruktion von den gewählten Schnitten gezeigt:

Sei $\{\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}\}$ eine andere Familie von lokalen Schnitten über der gleichen Überdeckung von X . Da $P \rightarrow Y^{[2]}$ ein \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel ist, muß $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} * c_{\alpha\beta}$ sein mit $c_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbb{C}_*$. Setzt man dies in (3.4.15) ein, so ergibt sich hier

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\alpha\beta} \circledast \tilde{\sigma}_{\beta\gamma} &= (\sigma_{\alpha\beta} * c_{\alpha\beta}) \circledast (\sigma_{\beta\gamma} * c_{\beta\gamma}) \\ &= (\sigma_{\alpha\beta} \circledast \sigma_{\beta\gamma}) * (c_{\alpha\beta} \cdot c_{\beta\gamma}) \\ &= \tilde{\sigma}_{\gamma\alpha} = \sigma_{\gamma\alpha} * c_{\alpha\beta} \\ \Rightarrow \tilde{g}_{\alpha\beta\gamma} &= g_{\alpha\beta\gamma} c_{\alpha\beta} c_{\beta\gamma} c_{\alpha\gamma}^{-1} = g_{\alpha\beta\gamma} (\delta c)_{\alpha\beta\gamma}. \end{aligned}$$

Dabei ist δ der Randoperator der Cech-Kohomologie, siehe Anhang B. Zwei Trivialisierungen unterscheiden sich also um einen Korand, sind somit kohomologisch äquivalent.

Sei $\{\tilde{s}_\alpha\}$ ein anderes System von Schnitten, $\{\tilde{P}_{\alpha\beta}\}$ pullback von P unter diesen und

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \tilde{P}_{\alpha\beta}$$

eine Familie von lokalen Schnitten in den zurückgezogenen \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündeln. Es gilt dann $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}(x) \in P_{s_\alpha(x)\tilde{s}_\alpha(x)}$. Seien

$$l_\alpha : U_\alpha \ni x \mapsto P_{s_\alpha(x)\tilde{s}_\alpha(x)} ; r_\alpha : U_\alpha \ni x \mapsto P_{\tilde{s}_\alpha(x)s_\alpha(x)}$$

mit

$$\sigma_{\alpha\beta}(x) = l_{\alpha}(x) \otimes \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}(x) \otimes r_{\beta}(x) \quad (3.4.16)$$

und

$$r_{\alpha}(x) \otimes l_{\alpha}(x) = e_{s_{\alpha}(x)} * c_{\alpha}(x)$$

für Funktionen $c_{\alpha} : U_{\alpha} \rightarrow \mathbb{C}_*$. Sei weiter

$$\tilde{l}_{\alpha} = l_{\alpha} * \sqrt{c_{\alpha}^{-1}}; \quad \tilde{r}_{\alpha} = r_{\alpha} * \sqrt{c_{\alpha}^{-1}},$$

so ergibt sich

$$\tilde{l}_{\alpha}(x) \otimes \tilde{r}_{\alpha}(x) = e_{s_{\alpha}(x)}.$$

Aus Gleichung (3.4.16) folgt dann

$$\sigma_{\alpha\beta}(x) = \tilde{l}_{\alpha}(x) \otimes \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}(x) \otimes \tilde{r}_{\beta}(x) = \tilde{l}_{\alpha}(x) \otimes \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}(x) * \left(\sqrt{c_{\alpha}^{-1}} \sqrt{c_{\beta}^{-1}} \right) \otimes \tilde{r}_{\beta}(x). \quad (3.4.17)$$

Benennt man nun noch $\tilde{c}_{\alpha\beta} := \sqrt{c_{\alpha}^{-1}} \sqrt{c_{\beta}^{-1}}$, so errechnet man aus (3.4.15) und (3.4.17):

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\gamma} * g_{\alpha\beta\gamma} &= \sigma_{\alpha\beta} \otimes \sigma_{\beta\gamma} \\ &= \tilde{l}_{\alpha} \otimes \tilde{\sigma}_{\alpha\beta} * \tilde{c}_{\alpha\beta} \otimes \tilde{r}_{\beta} \otimes \tilde{l}_{\beta} \otimes \tilde{\sigma}_{\beta\gamma} * \tilde{c}_{\beta\gamma} \otimes \tilde{r}_{\gamma} \\ &= \tilde{l}_{\alpha} \otimes \tilde{\sigma}_{\alpha\gamma} * (\tilde{g}_{\alpha\beta\gamma} \cdot \tilde{c}_{\alpha\beta} \cdot \tilde{c}_{\beta\gamma}) \otimes \tilde{r}_{\gamma} \\ &= \sigma_{\alpha\gamma} * (\tilde{g}_{\alpha\beta\gamma} \cdot \tilde{c}_{\alpha\beta} \cdot \tilde{c}_{\beta\gamma} \cdot \tilde{c}_{\alpha\gamma}^{-1}). \end{aligned}$$

Also unterscheiden sich g und \tilde{g} um einen Korand,

$$g_{\alpha\beta\gamma} = \tilde{g}_{\alpha\beta\gamma} \cdot \tilde{c}_{\alpha\beta} \cdot \tilde{c}_{\beta\gamma} \cdot \tilde{c}_{\alpha\gamma}^{-1}.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. \square

Wie schon im vorhergehenden Kapitel erwähnt, ist (wegen Lemma (3.18) und Lemma (3.19)) folgende lange Sequenz

$$\cdots \rightarrow \check{H}^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow \check{H}^2(X, \mathbb{C}_*) \rightarrow \check{H}^3(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \check{H}^3(X, \mathbb{C}) \rightarrow \cdots \quad (3.4.18)$$

exakt, und man erhält einen Isomorphismus

$$\check{H}^2(X, \mathbb{C}_*) \cong \check{H}^3(X, \mathbb{Z}). \quad (3.4.19)$$

Über den Chern-deRham-Komplex bekommt man nun noch die Aussage

$$\check{H}^3(X, \mathbb{Z}) = \check{H}_{dR}^3(M).$$

Den konkreten Isomorphismus werden wir im Kapitel 5.2 konstruieren. Das Interesse an dieser Verbindung wird durch den unten stehenden Satz über die Trivialität von Gerbes gerechtfertigt.

Definition 3.21: Seien (P, Y, X, \otimes) ein Gerbe, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ eine Überdeckung von X und $\{g_{\alpha\beta\gamma}\}_{\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{I}}$ definiert wie in (3.4.15).

Die Klasse in $\check{H}^3(X, \mathbb{Z})$, welche von dem System $\{g_{\alpha\beta\gamma}\}_{\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{I}}$ unter dem Isomorphismus (3.4.19) definiert wird, heißt Dixmier-Douady-Klasse.

Die Information, ob ein Gerbe trivial ist, steckt in der Dixmier-Douady-Klasse [g]. Es gilt nämlich der nachstehende

Satz 3.22: Sei (P, Y, X, \otimes) ein Gerbe. $\check{H}^2(X, \mathbb{C}_*)$ ist trivial genau dann, wenn P trivial ist.

Beweis: „ \Rightarrow “ Sei P trivial, $P \cong \pi_1^*(Q^*) \otimes \pi_2^*(Q)$. Es bedeuten $Q \rightarrow Y$ ein \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel, Q^* das dazu inverse (faserweise konstruiert, siehe Kapitel über Gerbes) und $\pi_i : Y^{[2]} \rightarrow Y$ die Projektionen auf die Komponenten. Sei weiter $Q_\alpha = s_\alpha^*(Q)$ pullback unter den lokalen Schnitten (U_α, s_α) wie oben, dann ist $P_{\alpha\beta} \cong Q_\alpha^* \otimes Q_\beta$. Aus einem Schnitt $\kappa_\alpha : U_\alpha \rightarrow Q_\alpha$ gewinnt man einen Schnitt $\sigma_{\alpha\beta} := (\kappa_\alpha)^{-1} \otimes \kappa_\beta = (\delta\kappa)_{\alpha\beta}$ über $U_\alpha \cap U_\beta$. Es folgt sofort

$$\sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\beta\gamma} = \kappa_\alpha^{-1} \kappa_\beta \kappa_\beta^{-1} \kappa_\gamma = \kappa_\alpha^{-1} \kappa_\gamma = \sigma_{\beta\gamma}$$

über $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$, und (3.4.15) wird zu $g_{\alpha\beta\gamma} = 1$.

„ \Leftarrow “ Seien $\{\rho_{\alpha\beta}\}$ lokale Schnitte in $\{P_{\alpha\beta}\}$, $\rho_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow P_{\alpha\beta}$ mit $\rho_{\alpha\beta} = \rho_{\beta\alpha}^{-1}$, für die $g_{\alpha\beta\gamma} = \rho_{\alpha\beta} \rho_{\beta\gamma} \rho_{\gamma\alpha}$. Solche Schnitte findet man, weil die Kohomologieklassse trivial ist. Setzt man dies in (3.4.15) ein, so ergibt sich, daß man auch $g_{\alpha\beta\gamma} = 1$ annehmen kann. Sei $Y_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$ und $Q_\alpha \rightarrow Y_\alpha$ ein \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel mit Faser $(Q_\alpha)_y = P_{(y, s_\alpha(\pi(y)))}$. Nun war $\sigma_{\alpha\beta}$ ein Schnitt in $P_{\alpha\beta}$. Aus der Gerbe-Multiplikation (Existenz des Inversen) ergibt sich faserweise

$$P_{\alpha\beta(y)} \cong P_{(s_\alpha(\pi(y)), y)}^* \otimes P_{(s_\beta(\pi(y)), y)} \cong (Q_\alpha)_y^* \otimes (Q_\beta)_y.$$

$\sigma_{\alpha\beta}$ sind also Übergangsabbildungen $Q_\alpha \rightarrow Q_\beta$. Man erhält deshalb ein \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel $Q \rightarrow Y$ (Man beachte, daß $g_{\alpha\beta\gamma} = 1$ gilt). Zum Schluß ist

$$P_{(y_1, y_2)} \cong P_{(y_1, s_\alpha(\pi(y_1)))}^* \otimes P_{(s_\alpha(\pi(y_2)), y_2)} = Q_{y_1} \otimes Q_{y_2}^*.$$

Damit ist (P, Y, X, \otimes) trivial. □

Nun wollen wir das bisher Gesagte auf die Situation in Kapitel 2 anwenden.

Kapitel 4

Das Determinantengerbe

Wie im Kapitel 2 bezeichnet \mathcal{A} Menge der Yang-Mills-Zusammenhänge in temporärer Eichung über einer Mannigfaltigkeit M^{2n+1} und \mathcal{G} die punktierte Gruppe der zeitunabhängigen Eichtransformationen. \mathcal{D}_A ist der Dirac-Hamilton-Operator zu einem Zusammenhang A aus \mathcal{A}

Definition 4.1: Sei $\mathcal{A}_0 := \{(\lambda, A) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A} \mid \lambda \notin \text{Spec}\{\mathcal{D}_A\}\}$,
 $\mathcal{A}_0^{[2]} := \{((\lambda, A), (\mu, A')) \in \mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_0 \mid A = A'\}$.

Ein typisches Element aus der zweiten Menge hat also die Gestalt (A, λ, μ) . Man beachte, daß sich zwar das Spektrum des Dirac-Operators stetig ändert über \mathcal{A} , aber Zusammenhangskomponenten von \mathcal{A}_0 weder einfach zusammenhängend sind, noch ganz \mathcal{A} überlagern. Es existiert speziell auch keine typische Faser, $\mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{A}$ ist nur eine Submersion. Es existiert eine natürliche Projektion $\pi : \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{A}$. Wegen

$$DET_{A,\lambda,\mu} \cong DET_{A,\lambda,\nu} \otimes DET_{A,\nu,\mu} \quad (4.0.1)$$

ergibt sich zusammenfassend

Lemma 4.2: $DET \rightarrow \mathcal{A}_0^{[2]}$ ist ein Gerbe.

Es gilt nun der folgende Satz, der eine Verbindung des letzten Kapitels mit 1.2 herstellt.

Satz 4.3: Das Gerbe $DET \rightarrow \mathcal{A}_0^{[2]}$ ist dann und nur dann trivial, wenn es zu $\mathcal{P} = \bigcup_A P(F_A)$ ein Hilbert-Bündel \mathcal{H} gibt, so daß $P(\mathcal{H}) = \mathcal{P}$.

Beweis: „ \Rightarrow “ Sei $DET_{A,\mu,\lambda} \cong L_{(A,\mu)}^* \otimes L_{(A,\lambda)}$ für ein \mathbb{C}_* -Bündel $L \rightarrow \mathcal{A}$ und

$$s_\lambda : U_\lambda \ni A \mapsto (A, \lambda) \in \mathcal{A}_0$$

ein trivialisierender Schnitt. Man definiert die folgenden Linienbündel als zu den \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündeln assoziierte Vektorbündel:

$$\widehat{DET}_{(A,\lambda,\mu)} = (s_\mu, s_\lambda)^* DET_{(A,\mu,\lambda)}, \text{ jeweils für alle } A \in U_\mu \cap U_\lambda, \text{ und}$$

$$\widehat{L}_{(A,\mu)} = s_\mu^* L_{(A,\mu)}.$$

Wie im Anhang erläutert, gilt auch für die assoziierten Linienbündel nach Voraussetzung

$$\widehat{DET}_{(A,\mu,\lambda)} \otimes \widehat{L}_{(A,\mu)}^* \otimes \widehat{L}_{(A,\lambda)},$$

da das Produkt \circ auf der Ebene der assoziierten Linienbündel der Tensorierung entspricht. L^* ist hier ein Linienbündel, auf dem \mathbb{C}_* durch Multiplikation mit dem Inversen wirkt.

Es gilt nach Konstruktion der Faser $F_{(A,\mu,\lambda)}$

$$F_{(A,\mu)} = F_{(A,\lambda)} \otimes \widehat{DET}_{(A,\mu,\lambda)} \text{ auf } U_\lambda \cap U_\mu,$$

und damit

$$F_{(A,\mu)} \otimes L_{(A,\mu)} = F_{(A,\lambda)} \otimes L_{(A,\lambda)}, \text{ für } A \in U_\lambda \cap U_\mu.$$

Man kann also auf U_λ

$$F_A = F_{(A,\mu)} \otimes L_{(A,\mu)}$$

setzen und erhält ein Hilbert-Bündel $\mathcal{H} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} F_A$ mit

$$P(\mathcal{H}) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} P(F_A) = \mathcal{P}.$$

Es ist nämlich $P(L_{(A,\lambda)}) = (1)$, wobei $\mathbb{1}$ hier Bündel über \mathcal{A}_0 mit typischer Faser 1 für alle Punkte $A \in \mathcal{A}$ und alle offenen Mengen U_λ ist. \mathcal{H} ist folglich das gesuchte Hilbert-Raum-Bündel.

„ \Leftarrow “ Seien $\mathbb{P}(\mathcal{H}) = \mathcal{P}$, $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{A}$ das vorgelegte Hilbert-Bündel und $L_{(A,\mu)}$ die Menge aller Isomorphismen von $F_{(A,\mu)}$ nach \mathcal{H}_A , die als (nach \mathbb{C}_* faktorisierte) Abbildungen auf den projektiven Räumen

$$\mathbb{P}(F_{(A,\mu)}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H}_A)$$

die Identität ergeben.

Nun ist $DET_{A,\mu,\lambda}$ die Menge aller Isomorphismen $F_{(A,\mu)} \rightarrow F_{(A,\mu)}$, die als projektive Abbildungen

$$\mathbb{P}(F_{(A,\mu)}) \rightarrow \mathbb{P}(F_{(A,\mu)})$$

die identische Abbildung darstellen, also $DET_{A,\mu,\lambda} = L_{(A,\mu)}^* \otimes L_{(A,\lambda)}$. \square

Bemerkungen:

1) Im letzten Teil des Beweises wird so das vorgelegte Bündel \mathcal{H} als Referenz für den Vergleich zweier lokaler Fock-Raum-Konstruktionen benutzt.

2) Im Beweis wurde nicht benötigt, daß \mathcal{A} kontrahierbar ist. Eine entsprechende Aussage gilt also auch für unten genauer betrachtete Quotientenräume \mathcal{A}/\mathcal{G} .

Das Gerbe DET wurde charakterisiert durch seine Dixmier-Douady-Klasse, ein bestimmtes Element aus $\check{H}^3(\mathcal{A}, \mathbb{Z})$. Diese verschwindet aber, da \mathcal{A} einfach zusammenhängend ist. Damit ist $(DET, \mathcal{A}_0, \mathcal{A}, \otimes)$ trivial nach Satz (3.22), und wir können mit Satz (4.3) folgern, daß ein Hilbert-Bündel \mathcal{H} mit obigen Eigenschaften existiert. Geht man aber über zum Eichorbitraum durch Faktorisierung in \mathcal{A} nach der Gruppenwirkung von \mathcal{G} , $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$, so läßt sich die Frage nach einem Hilbert-Bündel nicht so einfach beantworten. Zuerst bemerkt man, daß die Faktorisierung nach \mathcal{G} auch \mathcal{A}_0 in $\mathcal{A}_0/\mathcal{G}$ überführt, wobei entlang von \mathcal{G} -Orbits Fasern von $\mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{A}_0/\mathcal{G}$ gleich aussehen, da ja $\text{Spec}(\mathbb{D}_A)$ eichinvariant ist. Man erhält somit eine Faserung $\mathcal{A}_0/\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$. \mathcal{G} wirkt aber auch auf DET , da es eine Basistransformation in $V_A = H_{A,\lambda}^+ \cap H_{A,\mu}^-$ hervorruft, siehe Kapitel 2. Damit erhält man ein \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel $DET^{\mathcal{G}} \rightarrow (\mathcal{A}_0/\mathcal{G})^{[2]}$. $(DET^{\mathcal{G}}, \mathcal{A}_0/\mathcal{G}, \mathcal{A}/\mathcal{G}, \otimes)$ ist folglich ein Gerbe.

Ist nun $(DET^{\mathcal{G}}, \mathcal{A}_0/\mathcal{G}, \mathcal{A}/\mathcal{G}, \otimes)$ trivial? Wir wissen natürlich aus Kapitel (3), daß eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür das Verschwinden von der Kohomologie $\check{H}^3(X, \mathbb{Z})$ ist. Wendet man nun Lemma (3.7) auf $(DET^{\mathcal{G}}, \mathcal{A}_0/\mathcal{G}, \mathcal{A}/\mathcal{G}, \otimes)$ an, ergibt sich folgender Sachverhalt:

Da $(DET, \mathcal{A}_0, \mathcal{A}, \otimes)$ trivial ist, gibt es ein \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel L , das DET trivialisiert. Die Frage nach trivialem Gerbe $DET^{\mathcal{G}}$ führt also auf das Problem, ob man die Wirkung von \mathcal{G} auf \mathcal{A}_0 zu einer mit $DET \cong L^* \otimes L$ verträglichen Wirkung in L heben kann, und man wird auf ein Problem der Gruppenerweiterung von \mathcal{G} um $\mathcal{M}ap(\mathcal{A}, \mathbb{C}_*)$ geführt. Um das zu sehen, geht man wie folgt vor. Sei $Aut_{\mathcal{G}}(L)$ die Gruppe aller Automorphismen von L , die \mathcal{G} überlagern. $Aut_{\mathcal{G}}(L)$ ist demnach eine Erweiterung von \mathcal{G} durch $\mathcal{M}ap(\mathcal{A}_0, \mathbb{C}_*)$, die Untergruppe von $Aut_{\mathcal{G}}(L)$, die $\mathbb{1} \in \mathcal{G}$ überlagert. Weil $\mathbb{1} \in \mathcal{G}$ auf DET trivial operiert, und $DET \cong L^* \otimes L$ gilt, muß für jedes $\omega \in \mathcal{M}ap(\mathcal{A}_0, \mathbb{C}_*)$ gelten

$$\omega(A, \mu)^{-1} \omega(A, \lambda) = 1, \quad (4.0.2)$$

d.h., der Funktionswert von f ist konstant in einer Faser. f liefert deshalb ein Element $f \in \mathcal{M}ap(\mathcal{A}, \mathbb{C}_*)$ und folgende kurze Sequenz ist exakt.

$$1 \rightarrow \mathcal{M}ap(\mathcal{A}, \mathbb{C}_*) \rightarrow \hat{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 1$$

Wenn diese Sequenz aufspaltet, d.h., wenn ein Homomorphismus $s : \mathcal{G} \rightarrow \hat{\mathcal{G}}$ existiert, so ist $\hat{\mathcal{G}} \cong \mathcal{M}ap(\mathcal{A}, \mathbb{C}_*) \times \mathcal{G}$, und $DET^{\mathcal{G}}$ ist trivial.

4.1 Liftung von Gruppenwirkungen

Wenden wir nun die Erkenntnisse über Gruppenerweiterungen auf unseren Fall DET als Gerbe über $\mathcal{A}_0^{[2]}$ an. DET war trivial im Gerbesinn, es gibt also ein \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel L über \mathcal{A}_0 mit

$$DET \cong L \otimes L^*. \quad (4.1.3)$$

Dieses Hauptfaserbündel L ist, wie im Kapitel 6.1 erläutert, mit dem Spektralfluß verknüpft. Die Gruppe der Eichtransformationen \mathcal{G} wirkt nun auf dem 1-Teilchen-Hilbertraum, indem es die gewählte Basis transformiert. Damit wirkt \mathcal{G} auch in DET , wobei die Wirkung auf $\mathcal{A}_0^{[2]}$ überlagert wird. Auf L wirkt \mathcal{G} durch eine Erweiterung $\hat{\mathcal{G}}$ um $\mathcal{M}ap(\mathcal{A}_0, \mathbb{C}_*)$. Man hat also eine exakte Sequenz

$$1 \rightarrow \mathcal{M}ap(\mathcal{A}_0, \mathbb{C}_*) \rightarrow \hat{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 1.$$

Dabei ist $\hat{\mathcal{G}}$ die Gruppe aller \mathbb{C}_* -Automorphismen in L , die \mathcal{G} überlagern. Seien im folgenden die Elemente aus $\hat{\mathcal{G}}$, die ein Element Φ aus \mathcal{G} überlagern, mit $\hat{\Phi}$ bezeichnet. Die Frage ist nun, ob die $\hat{\mathcal{G}}$ -Wirkung auf L und die \mathcal{G} -Wirkung auf DET mit dem Isomorphismus (4.1.3) verträglich sind. Dann würde nämlich bei Faktorisierung gelten

$$DET^{\mathcal{G}} \cong DET/\mathcal{G} \cong L/\mathcal{G} \otimes L^*/\mathcal{G},$$

und $DET^{\mathcal{G}}$ wäre trivial.

Sei $\iota : DET \rightarrow L \otimes L^*$ der gegebene Isomorphismus. Da DET ein Gerbe ist, existiert ein Eins-Schnitt über der Diagonale in $\mathcal{A}_0^{[2]}$, $\epsilon : \mathcal{A}_0 \rightarrow DET$. Sei nun ein $(A, \lambda) \in \mathcal{A}_0$ und das entsprechende Element (A, λ, λ) aus der Diagonale von $\mathcal{A}_0^{[2]}$ fixiert. Es existiert dann eine Abbildung von einer Umgebung U_α von (A, λ) nach L :

$$\sigma_\alpha := \text{pr}_1 \circ \iota \circ \epsilon : \mathcal{A}_0 \supset U_\alpha \rightarrow L. \quad (4.1.4)$$

Dabei ist $\epsilon : \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{A}_0^{[2]} \rightarrow DET$ der (global existierende) Eins-Schnitt im Gerbe DET . Die Abbildung σ_α läßt sich nicht global fortsetzen, da man ja zu jedem Element in $\iota \circ \epsilon(U_\alpha) \subset L \otimes L^*$ von der Form $l \otimes l'$ einen Repräsentanten (l, l') auswählen muß. Eine andere Auswahl führt demnach auf eine andere Abbildung $\tilde{\sigma}_\alpha$, die sich von σ_α nur um eine Funktion aus $\mathcal{M}ap(U_\alpha, \mathbb{C}_*)$ unterscheidet,

$$\tilde{\sigma}_\alpha = \sigma_\alpha * \gamma.$$

In DET wirkt nun \mathcal{G} in trivialer Weise auf den Eins-Schnitt ϵ :

$$\Phi(\epsilon_A) = \epsilon_{A\Phi} \quad \forall \Phi \in \mathcal{G}, \quad (4.1.5)$$

da DET , eingeschränkt auf die Diagonale von $\mathcal{A}_0^{[2]}$, das Determinantenbündel zu allen $V_{A,\lambda,\lambda}$ ($= \emptyset$) ist (siehe Kapitel 2) und die Wirkung von \mathcal{G} durch einen Basiswechsel in den $V_{A,\lambda,\lambda}$ induziert wird. Über σ_α erhält man für eine Umgebung \mathcal{U}_e des Einselements in \mathcal{G} einen \mathcal{G} -Orbit auf $L|_{\mathcal{U}_\alpha}$:

$$\forall \Phi \in \mathcal{U}_e \subset \mathcal{G}; c \in \mathbb{C}_* : \quad \Phi(\sigma_\alpha(A) * c) = \sigma_\alpha(A^\Phi) * c. \quad (4.1.6)$$

Für ein Element $\hat{\Phi}$ der Erweiterung von \mathcal{G} gilt im Vergleich dazu

$$\hat{\Phi}(\sigma_\alpha(A)) = \sigma_\alpha(A^\Phi) * \kappa_\alpha(A, \Phi) \quad (4.1.7)$$

für eine Abbildung $\kappa_\alpha : \mathcal{U}_e \rightarrow \mathcal{M}ap(U_\alpha, \mathbb{C}_*)$. Für einen anderen Schnitt $\tilde{\sigma}_\alpha$, der, wie oben angeführt, durch eine andere lokale Trivialisierung von $L \otimes L^*$ entsteht, ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(\tilde{\sigma}_\alpha((A, \lambda))) &= \hat{\Phi}(\sigma_\alpha((A, \lambda)) * \gamma((A, \lambda))) \\ &= \sigma_\alpha(A^\Phi) * (\gamma((A, \lambda)) \cdot \kappa((A, \lambda), \Phi)) \\ &= \tilde{\sigma}_\alpha(A^\Phi) * (\kappa((A, \lambda), \Phi) \cdot \gamma((A, \lambda)) \cdot \gamma(A^\Phi)^{-1}) \\ &= \tilde{\sigma}(A^\Phi) * \tilde{\kappa}((A, \lambda), \Phi). \end{aligned}$$

Die beiden Funktionen κ und $\tilde{\kappa}$ unterscheiden sich also nur um einen Korand. Seien nun Φ_1 und Φ_2 zwei Elemente aus \mathcal{G} . Zwei überlagernde $\hat{\Phi}_1$ und $\hat{\Phi}_2$ erfüllen dann

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_2(\hat{\Phi}_1(\sigma_\alpha((A, \lambda)))) &= \hat{\Phi}_2(\sigma_\alpha(((A^{\Phi_1}, \lambda), \lambda)) * \kappa((A, \lambda), \Phi_1)) \\ &= \sigma_\alpha(A^{\Phi_1\Phi_2}) * (\kappa((A^{\Phi_1}, \lambda), \Phi_2) \kappa(A, \Phi_1)) \\ &= \widehat{\Phi_1\Phi_2}(\sigma_\alpha(A)) * \\ &\quad (\kappa((A^{\Phi_1}, \lambda), \Phi_2) \kappa(A, \Phi_1) \kappa(A, \Phi_1\Phi_2)^{-1}) \end{aligned}$$

Man kann damit eine Abbildung $\omega_\alpha : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{M}ap(U_\alpha, \mathbb{C}_*)$ definieren:

$$\omega_\alpha((A, \lambda), \Phi_1, \Phi_2) = \kappa_\alpha((A^{\Phi_1}, \lambda), \Phi_2) \kappa_\alpha((A, \lambda), \Phi_1\Phi_2)^{-1} \kappa_\alpha((A, \lambda), \Phi_1). \quad (4.1.8)$$

Dies sieht so wie das Faktorsystem aus Kapitel C.1 aus. In der Tat gilt

Lemma 4.4: ω_α läßt sich zu einer 2-Form α auf \mathcal{A}_0 fortsetzen,

$$\omega : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{M}ap(\mathcal{A}_0, \mathbb{C}_*) \quad \omega_\alpha = \omega|_{U_\alpha}.$$

Beweis: Zunächst wählt man eine Überdeckung von \mathcal{A}_0 mit offenen Mengen U_α und lokalen subordinierten Schnitten σ_β . Auf dem Durchschnitt $U_\alpha \cap U_\beta$ zweier solcher Mengen unterscheiden sich die Schnitte nur um eine komplexwertige Funktion

$$\sigma_\alpha \upharpoonright_{U_{\alpha\beta}} = \sigma_\beta \upharpoonright_{U_{\alpha\beta}} * \gamma_{\alpha\beta}.$$

Seien nun $\{\omega_\alpha\}$ die lokalen 2-Formen aus (4.1.8). Es gilt auf $U_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} \omega_\alpha \upharpoonright_{U_{\alpha\beta}} &= \left(\kappa_\alpha((A^{\Phi_1}, \lambda), \Phi_2) \kappa_\alpha((A, \lambda), \Phi_1 \Phi_2)^{-1} \kappa_\alpha((A, \lambda), \Phi_1) \right) \upharpoonright_{U_{\alpha\beta}} \\ &= \kappa_\beta((A^{\Phi_1}, \lambda), \Phi_2) \upharpoonright_{U_{\alpha\beta}} * \left(\gamma_{\alpha\beta}((A^{\Phi_1}, \lambda)) \gamma_{\alpha\beta}((A^{\Phi_1 \Phi_2}, \lambda))^{-1} \right) \\ &\quad \kappa_\beta((A, \lambda), \Phi_1 \Phi_2)^{-1} \upharpoonright_{U_{\alpha\beta}} * \left(\gamma_{\alpha\beta}((A, \lambda)) \gamma_{\alpha\beta}^{-1}((A^{\Phi_1 \Phi_2}, \lambda)) \right) \\ &\quad \kappa_\alpha((A, \lambda), \Phi_1) \upharpoonright_{U_{\alpha\beta}} * \left(\gamma_{\alpha\beta}((A, \lambda)) \gamma_{\alpha\beta}((A^{\Phi_1}, \lambda))^{-1} \right) \\ &= \left(\kappa_\beta((A^{\Phi_1}, \lambda), \Phi_2) \kappa_\beta((A, \lambda), \Phi_1 \Phi_2)^{-1} \kappa_\beta((A, \lambda), \Phi_1) \right) \upharpoonright_{U_{\alpha\beta}} \\ &= \omega_\beta((A, \lambda), \Phi_1, \Phi_2). \end{aligned}$$

□

Man definiert nun wieder einen Randoperator

$$\begin{aligned} (\delta \kappa)((A, \lambda), \Phi_1, \dots, \Phi_{n+1}) &= \kappa((\Phi_1(A), \lambda), \Phi_2, \dots, \Phi_{n+1}) \\ &\quad \prod_{i=1}^n \kappa((A, \lambda), \Phi_1, \dots, \Phi_i \Phi_{i+1}, \dots, \Phi_{n+1})^{(-1)^i} \kappa((A, \lambda), \Phi_1, \dots, \Phi_n)^{(-1)^n}, \end{aligned}$$

und Formel (4.1.8) wird zu

$$(\omega((A, \lambda), \Phi_1, \Phi_2)) \upharpoonright_{U_\alpha} = (\delta \kappa_\alpha)((A, \lambda), \Phi_1, \Phi_2).$$

Lemma 4.5: Die Gruppenwirkung von \mathcal{G} in L ist genau dann mit (4.1.3) verträglich, wenn ω trivial ist im Sinne der Gruppenkohomologie, das heißt, wenn ein $\kappa \in \text{Map}(\mathcal{A}_0, \mathbb{C}_*)$ existiert, welches für alle Φ_1, Φ_2 in $\hat{\mathcal{G}}$ der Gleichung

$$\omega((A, \lambda), \Phi_1, \Phi_2) = (\delta \kappa)((A, \lambda), \Phi_1, \Phi_2)$$

genügt.

Bemerkung: Die oben erwähnten 1-Formen κ_α erfüllen dies nicht, da sie sich im allgemeinen nicht zu 1-Formen auf ganz \mathcal{A}_0 fortsetzen lassen.

Beweis: Die beiden Gruppenwirkungen sind genau dann mit dem Isomorphismus (4.1.3) verträglich, wenn man äquivariante Schnitte σ_α finden kann.

„ \Rightarrow “ Hat man äquivariante Schnitte, so verschwindet κ_α auf allen U_α und damit auch ω .

„ \Leftarrow “ Ist ω trivial, so findet man eine 1-Form κ , mit der man (4.1.8) global erfüllen kann. In der Einschränkung auf eine beliebige Umgebung U_α ist κ gleich κ_α . Damit erhält man lokal äquivariante Schnitte, wenn man die ausgewählten Elemente aus $\hat{\mathcal{G}}$ um κ abändert:

$$\hat{\Phi}' := \hat{\Phi} * \kappa \Phi^{-1}.$$

In der Tat rechnet man nach

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}'(\sigma_\alpha((A, \lambda))) &= \sigma_\alpha((A^\Phi, \lambda)) * (\kappa_\alpha((A, \lambda), \Phi) \cdot \kappa((A, \lambda), \Phi)^{-1}) \\ &= \sigma_\alpha((A^\Phi, \lambda)). \quad \square \end{aligned}$$

Nun interessieren wir uns für einen infinitesimalen Ausdruck [10]. Sei dazu $\eta \in T_{(A, \lambda)}\mathcal{A}_0$ ein Tangentialvektor an einen \mathcal{G} -Orbit $\{(\Phi_t(A), \lambda)\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$ und l ein Element aus $L_{(A, \lambda)}$, der Faser von L über (A, λ) . η kann nun auf zwei Arten geliftet werden: Zum einen über die \mathcal{G} -Wirkung auf L , dies ergibt einen Vektor η_L ; zum anderen über einen lokalen Schnitt s in L , dieser sei mit $s_*\eta$ bezeichnet. $s_*\eta - \eta_L$ ist natürlich horizontal. Unter der Verwendung der Beziehung (4.1.7) sieht man, daß $s_*\eta - \eta_L$ ein Vektor ist mit

$$\begin{aligned} s_*\eta - \eta_L &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (s((\Phi_t(A), \lambda))) - \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (l * \Phi_t) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (l * \Phi_t * \kappa((A, \lambda), \Phi_t)) - \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (l * \Phi_t(A), \lambda) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \kappa((A, \lambda), \Phi_t) \\ &= \mathfrak{k}((A, \lambda), \xi). \end{aligned}$$

Dabei ist $\xi := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_t$ der Generator von $\{\Phi_t\}$ aus $\text{Lie}\mathcal{G}$.

Sei nun ∇ eine Zusammenhangs-1-Form über \mathcal{A}/\mathcal{G} und F_∇ deren Krümmung. Sei weiter ω die zu ∇ und der Trivialisierung κ gehörende 1-Form auf Q/\mathcal{G} , d.h.

$$\omega = \pi^*\nabla + \kappa^*\Theta.$$

Man beachte insbesondere, daß sich diese Formel vereinfacht hat, da \mathbb{C}_* abelsch ist. Es gilt¹ $d\omega = d\pi^*\nabla$ und damit

$$\begin{aligned} \pi^*p^*F_\nabla &= p^*\pi^*d\nabla = p^*d\pi^*\nabla \\ &= p^*d\omega. \end{aligned}$$

¹Sei U eine offene Umgebung in \mathcal{A}/\mathcal{G} und $\kappa : Q|_U \rightarrow \mathbb{C}_*$ eine lokale Trivialisierung. Sei $s_q : U \rightarrow Q$ eine Familie lokaler Schnitte mit $\kappa \circ s_q(x) = 1 \forall x \in U$ und $s_q(x_0) = q$ für ein fixiertes x_0 aus U . Nun kann man in T_qQ eine Basis $\{X_1, X_2, \dots\}$ einführen mit X_1 vertikal und X_2, X_3, \dots tangential

Nun ist $\pi \circ s = id|_{\mathcal{A}}$, also wird dies unter dem pullback mit s zu

$$p^* F_{\nabla} = ds^* p^* \omega =: d\mu.$$

Somit ist μ die gesuchte Abbildung. Seien jetzt wieder $\eta_Q, s_*\eta$ die beiden Lifts von $\eta \in T_A \mathcal{A}$. η_Q war aber tangential an Orbits der \mathcal{G} -Wirkung in Q , deshalb ist $p_*\eta_Q = 0$. Wegen $\pi_*(s_*\eta - \eta_Q) = \eta - \eta = 0$ ist $s_*\eta - \eta_Q$ vertikal und erfüllt damit

$$p^* \omega(s_*\eta - \eta_Q) = s_*\eta - \eta_Q.$$

Setzt man nun η in μ ein, so sieht man

$$\begin{aligned} \mu(\eta) &= s^* p^* \omega(\eta) \\ &= p^* \omega(s_*\eta) \\ &= p^* \omega(s_* - \eta_Q) \\ &= s_*\eta - \eta_Q = \mathfrak{k}(A, \eta). \end{aligned}$$

Also ist μ einerseits das Bild unter der Transgressionsabbildung von F_{∇} , andererseits aber (in der Einschränkung auf \mathcal{G} -Orbits in \mathcal{A}) die *Lie* \mathcal{G} -wertige 1-Form, die eine Gruppenerweiterung differentiell beschreibt.

an $s_q(U)$. Die Maurer-Cartan-Form für \mathbb{C}_* sei hier mit Θ bezeichnet. $\kappa^* \Theta$ ist dann das pullback auf Q/\mathcal{G} und es gilt

$$\begin{aligned} \Theta^i &:= (\kappa^* \Theta)(X_i) = 0 \quad i \neq 1 \\ \Theta^1 &:= (\kappa^* \Theta)(X_1) = X_1. \end{aligned}$$

Dabei wurde in der untersten Zeile die Liealgebra von \mathbb{C}_* mit dem fundamentalen Vektorfeld identifiziert.

In den gewählten Koordinaten hat also $\kappa^* \Theta$ die Form

$$\kappa^* \Theta = \Theta^1 dx^1.$$

Für die äußere Ableitung von $\kappa^* \Theta$ ergibt sich damit

$$d\kappa^* \Theta = \frac{\partial \Theta^1}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^1 = dx^1 \wedge dx^1 = 0.$$

Kapitel 5

Die Dixmier-Douady-Form

5.1 Gerbezusammenhänge

Sei ∇ ein Zusammenhang im Gerbe (P, Y, X, \otimes) . $\nabla \otimes \nabla$ sei der induzierte Zusammenhang in $P \times P \rightarrow Y^{[2]} \times Y^{[2]}$. Bezeichnet

$$\pi_{ij}^4 : Y^{[2]} \times Y^{[2]} \ni (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_i, X_j) \in Y^{[2]}$$

die komponentenweise Projektion, so läßt sich der induzierte Zusammenhang wie folgt schreiben:

$$\nabla \otimes \nabla = (\pi_{12}^4)^* \nabla + (\pi_{34}^4)^* \nabla.$$

$\nabla \circ \nabla$ ist nun $\nabla \otimes \nabla$, eingeschränkt auf $Y^{[2]} \circ Y^{[2]}$. Nun ist aber $Y^{[2]} \circ Y^{[2]} \cong Y^{[3]}$, und zwar über die Abbildung

$$f : (x, y, y, z) \mapsto (x, y, z).$$

Damit wird

$$\nabla \circ \nabla = (\pi_{12}^3)^* \nabla + (\pi_{23}^3)^* \nabla,$$

wobei $\pi_{ij}^3 : Y^{[3]} \rightarrow Y^{[2]}$, analog zum obigen Fall, Projektionen auf die Komponenten sind. Der Abbildung $[(x, y), (y, z)] \mapsto (x, z)$ entspricht somit die Projektion π_{13}^3 . Damit ist man gerüstet für die folgende

Definition 5.1 [Murray]: Sei ∇ Zusammenhang im Gerbe (P, Y, X, \otimes) . ∇ heißt Gerbezusammenhang, wenn das Bild von $\nabla \circ \nabla$ unter der Produktabbildung \otimes wieder ∇ ergibt. Explizit heißt das

$$(\pi_{12}^3)^* \nabla + (\pi_{23}^3)^* \nabla = (\pi_{13}^3)^* \nabla.$$

Die letzte Eigenschaft legt nahe, eine Abbildung

$$\delta : \Omega^1(Y^{[2]}) \ni \omega \mapsto (\pi_{12})^* \omega + (\pi_{23})^* \omega - (\pi_{13})^* \omega \in \Omega^1(Y^{[3]})$$

einzuführen. Der obere Index bei den Projektionen wird im folgenden weggelassen, da es keine Verwechslungsmöglichkeit gibt. Aus der Definition kann man sofort entnehmen, daß $\delta \nabla = 0$ für Gerbezusammenhänge gilt.

Sei nun P trivial, $P \cong \text{Aut}(\pi_1^* Q, \pi_2^* Q)$ für ein \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel $Q \rightarrow Y$. π_i sei wieder die Projektion auf die i -te Komponente von $Y^{[2]}$. Ist A ein Zusammenhang in Q , so ist

$$\nabla = \pi_1^* A - \pi_2^* A$$

ein Gerbe-Zusammenhang. In der Tat rechnet man nach:

$$\begin{aligned} \delta \nabla &= \pi_{12}^* (\pi_1^* A - \pi_2^* A) + \pi_{23}^* (\pi_1^* A - \pi_2^* A) - \pi_{13}^* (\pi_1^* A - \pi_2^* A) \\ &= (\pi_1 \pi_{12})^* A - (\pi_2 \pi_{12})^* A + (\pi_1 \pi_{23})^* A \\ &\quad - (\pi_2 \pi_{23})^* A - (\pi_1 \pi_{13})^* A + (\pi_2 \pi_{13})^* A = 0. \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen macht man sich am besten klar, wenn man alle Relationen der Form

$$\pi_2 \pi_{12} = \pi_1 \pi_{23}$$

aufschreibt.

Dieses Beispiel legt nahe, δ auch auf $\Omega^1(Y)$ zu definieren als

$$\delta A = \pi_1^* A - \pi_2^* A.$$

Wie man leicht nachrechnen kann, gilt

$$\delta \cdot \delta = 0.$$

Im Anhang wird gezeigt, daß die zugehörige Kohomologie (δ läßt sich in offensichtlicher Weise auf $\Omega(Y^{[n]})$, $n \in \mathbb{N}$, $Y^{[0]} \equiv Y$, definieren) trivial ist. Dies ließe sich schon in den folgenden Beweisen verwenden, ich ziehe aber den Weg zu Fuß vor, um mit der neuen Situation vertraut zu werden. Es gilt

Lemma 5.2: *Für jedes Gerbe existiert ein Gerbezusammenhang.*

Bemerkung. Wegen $\delta \nabla = 0$ existiert ein A mit $\delta A = \nabla$.

Beweis. Sei $\{U_\alpha\}$ eine Überdeckung von X mit subordinierten Schnitten in $\pi^{-1}(U_\alpha) \equiv Y_\alpha \subset Y$. Deshalb ist $P_\alpha := P|_{Y_\alpha^{[2]}}$ trivial, es existiert ein Gerbezusammenhang

∇_α . Sei nun $\{Y_\alpha^{[2]}\}$ die Überdeckung von $Y^{[2]}$, die von $\{U_\alpha\}$ induziert wird. Mit einer Zerlegung der 1, $\{\psi_\alpha\}$, die $\{Y_\alpha^{[2]}\}$ untergeordnet ist, erhält man mit

$$\nabla = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha} \nabla_{\alpha}$$

einen Gerbezusammenhang in P . □

Mit Hilfe des Anhangs, in dem die Trivialität der δ -Kohomologie gezeigt wird, erhält man folgende Struktur des Raumes der Gerbezusammenhänge in $P \rightarrow Y^{[2]}$:

Lemma 5.3: *Der Raum aller Zusammenhänge ist ein affiner Vektorraum aller 1-Formen über Y modulo pullback von 1-Formen über M ,*

$$\Omega^1(Y) / \pi^* \left(\Omega^1(M) \right).$$

Beweis Seien ∇_1 und ∇_2 zwei solche Zusammenhänge. Es gilt

$$\delta(\nabla_1 - \nabla_2) = (\delta\nabla_1 - \delta\nabla_2) = 0.$$

Demzufolge existiert ein $\eta \in \Omega^1(Y) \equiv \Gamma(T^*Y \otimes Lie(\mathbb{C}_*))$ mit

$$\nabla_1 - \nabla_2 = \delta\eta.$$

Andererseits ist $\nabla + \delta(\mu)$ ein Gerbezusammenhang für eine 1-Form μ über Y und ist gleich ∇ genau dann, wenn $\delta(\mu) = 0$, das heißt, μ pullback einer 1-Form über M ist. □

5.2 Gerbekrümmung und Dixmier-Douady-Form

Sei ∇ ein Gerbezusammenhang, $F_{\nabla} = d\nabla$ die Krümmung. Man beachte, daß die Strukturgruppe von P abelsch ist. Für triviale Gerbes war der Zusammenhang Bild unter δ eines Zusammenhangs A im trivialisierenden Bündel $Q \rightarrow Y$ (hier galt $P_{(x,y)} \cong \text{Aut}_{\mathbb{C}_*}(Q_x, Q_y)$), und es ergibt sich für die Krümmung

$$F_{\nabla} = d\nabla = d(\pi_1^*A - \pi_2^*A) = \pi_1^*dA - \pi_2^*dA = \pi_1^*f - \pi_2^*f.$$

Hier ist $f = dA$ die Krümmung in Q , also eine 2-Form über Y . Mit der Trivialität der δ -Kohomologie zeigt man nun, daß alle Gerbekrümmungen auf diese Weise entstehen:

Da δ pullback von Projektionen ist, vertauscht es mit dem äußeren Differential, und man erhält

$$\delta F_{\nabla} = \delta d\nabla = d\delta\nabla = 0.$$

(Die letzte Gleichheit ergibt sich, weil ∇ ein Gerbezusammenhang ist.) Es existiert also ein $f \in \Omega^2(Y)$ mit $F_\nabla = \delta f$. \square

Aus der Bianchi-Identität ergibt sich (wieder weil \mathbb{C}_* als Strukturgruppe abelsch ist) $dF_\nabla = 0$. Dies ist gleichbedeutend mit

$$0 = dF_\nabla = \pi_1^* df - \pi_2^* df = \delta df.$$

Es existiert also eine 3-Form ω auf X mit

$$df = \pi^* \omega. \quad (5.2.1)$$

Man kann das aber auch wie folgt sehen [26]. Sei $(X, Z) \in T_{(x,z)}Y^{[2]}$ mit $X \in T_x Y$, $Z \in T_z Y$. X definiert eine Klasse von Kurven $[c_x(t)]$ mit $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, analog Z . Es gilt $\pi(c_x(t)) = \pi(c_z(t))$ in einer Umgebung von $\pi(x) = \pi(z)$. Dies ist gleichbedeutend mit $\pi_* X = \pi_* Z \forall (X, Z) \in T_{(x,z)}Y^{[2]}$. Gleichung (5.2.1) liest sich dann

$$df(X_1, X_2, X_3) = df(Z_1, Z_2, Z_3), \text{ falls } \pi_*(X_i) = \pi_*(Z_i) \ i = 1, 2, 3. \quad (5.2.2)$$

Man kann also setzen

$$\omega_{(m)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) := df_{(x)}(X_1, X_2, X_3)$$

für $M \ni m = \pi(x)$ und $\xi_i = \pi_*(X_i)$. Dies ist unabhängig von der konkreten Wahl von x und (X_i) , wie (5.2.2) lehrt. Folglich ist ω die gesuchte 3-Form, denn es gilt

$$(\pi^* \omega)_{(x)}(X_1, X_2, X_3) = \omega_{(m)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = df_{(x)}(X_1, X_2, X_3).$$

Zum Abschluß sei noch bemerkt, daß ω geschlossen ist:

$$\pi^*(d\omega) = d\pi^* \omega = ddf = 0.$$

Definition 5.4: $\frac{\omega}{2\pi i}$ heißt *Dixmier-Douady-Form des Paares* (∇, f) .

Verwendet man die Trivialität der δ -Kohomologie, so läßt sich die Wohldefiniertheit zeigen. Genauer gesagt liegt ω in einer Klasse aus $H_{dR}^3(X, \mathbb{R})$, der deRham'schen Kohomologie. Die Freiheiten bei der Konstruktion von ω führen nun nicht aus dieser Klasse heraus. Die Dixmier-Douady-Form ist also eindeutig bis auf exakte 3-Formen über M .

a) Sei f' eine weitere 2-Form mit $F_\nabla = \delta f'$. Dann ist $\delta(f - f') = 0$, das heißt, f und f' unterscheiden sich nur um eine von M zurückgezogene Funktion ρ

$$f = f' + \pi^*(\rho) \Rightarrow df - df' = \pi^*(d\rho) \Rightarrow \omega - \omega' = d\rho.$$

Hier ist ω' die aus f' gewonnene Dixmier-Douady-Form.

b) Sei ∇' ein anderer Gerbezusammenhang. Nach den Ausführungen im letzten Abschnitt bedeutet dies

$$\nabla' = \nabla + \delta(\mu).$$

Für eine 1-Form μ über Y . Fährt man in der Konstruktion wie oben fort, so ergibt sich

$$\begin{aligned} F_{\nabla'} &= d\nabla' = d\nabla + d\delta\mu \\ &= F_{\nabla} + \delta d\mu \\ \Rightarrow \delta f' &= F_{\nabla'} = F_{\nabla} + \delta d\mu \\ &= \delta f + \delta d\mu \\ \Rightarrow f' &= f + d\mu + \delta\eta \\ \Rightarrow df' &= df + \delta d\eta = df + \pi^* d\eta \\ \Rightarrow \omega' &= \omega + d\eta; \end{aligned}$$

ω' und ω definieren also die gleiche Klasse in $H_{DR}^3(X, \mathbb{R})$. Im Kapitel über die Dixmier-Douady-Klasse eines Gerbe haben wir gesehen, daß diese als Klasse in $\check{H}^3(X, \mathbb{Z})$ Gerbes klassifiziert. Im folgenden Abschnitt wird nun der Zusammenhang zwischen der Dixmier-Douady-Klasse und der Dixmier-Douady-Form hergestellt.

5.3 $\check{H}^3(X, \mathbb{Z})$ vs. $H_{DR}^3(X, \mathbb{R})$

Sei wieder (P, Y, X, \otimes) ein Gerbe. Die Dixmier-Douady-Form war eine bestimmte Klasse in $H_{DR}^3(M, \mathbb{R})$, während die Dixmier-Douady-Klasse aus $\check{H}^3(X, \mathbb{Z})$ stammte. Ich betrachte die folgende Sequenz

$$1 \rightarrow C_*^\infty(X) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(X) \xrightarrow{d_1} \Omega^2(X) \xrightarrow{d_2} 0.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} C_*^\infty(X) &= \{f \in C^\infty(X) \mid f(x) \neq 0 \forall x \in X\} \text{ und} \\ d_0 : C_*^\infty(X) &\ni f \mapsto f^{-1}df \in \Omega^1(X). \end{aligned}$$

Sei weiter $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ eine Überdeckung von X . Gegeben seien nun Tripel

$$\begin{aligned} &[f_\alpha, A_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta\gamma}]_{\alpha, \beta, \gamma \in I} \text{ mit} \\ f_\alpha &\in \Omega^2(U_\alpha), A_{\alpha\beta} \in \Omega^1(U_\alpha \cap U_\beta), g_{\alpha\beta\gamma} \in C_*^\infty(U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma). \end{aligned}$$

Diese Tripel gehören derselben Klasse an, wenn gilt

$$f_\alpha - f_\beta = A_{\alpha\beta} \quad (\text{I})$$

$$A_{\alpha\beta} - A_{\beta\gamma} + A_{\gamma\alpha} = g_{\alpha\beta\gamma}^{-1} dg_{\alpha\beta\gamma}. \quad (\text{II})$$

Lemma 5.5: Sei $s_\alpha : U_\alpha \rightarrow Y$ ein System von (trivialisierenden) Schnitten, $P_{\alpha\beta} := (s_\alpha, s_\beta)^* P$ und $\sigma_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow P_{\alpha\beta}$ mit

$$\sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\beta\gamma} = \sigma_{\alpha\gamma} g_{\alpha\beta\gamma}$$

auf $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Sei weiter ∇ ein Gerbezusammenhang in P , F_∇ dessen Krümmung und $\hat{f} \in \Omega^2(Y)$ die auf TY zurückgezogene 2-Form $f \in \Omega^2(P)$ mit $F_\nabla = \delta f$.

Dann gilt: Das Paar $(\nabla, \sigma_{\alpha\beta})$ definiert eine Klasse $[f_\alpha, A_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta\gamma}]_{\alpha, \beta, \gamma \in I}$ im obigen Sinn.

Beweis: Sei $g_{\alpha\beta\gamma}$ wie in der Voraussetzung, $\nabla_{\alpha\beta} = (s_\alpha, s_\beta)^* \nabla$, $A_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^* \nabla_{\alpha\beta}$ und $f_\alpha = s_\alpha^* \hat{f}$. Da ∇ ein Gerbezusammenhang ist, gilt

$$\nabla_{\alpha\beta} \otimes \nabla_{\beta\gamma} = \nabla_{\alpha\gamma},$$

und es ergibt sich durch pullback mit $\sigma_{\alpha\beta} \otimes \sigma_{\beta\gamma}$ für die linke Seite $A_{\alpha\beta} + A_{\beta\gamma}$. Andererseits ist nach Voraussetzung $\sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\beta\gamma} = \sigma_{\alpha\gamma} g_{\alpha\beta\gamma}$, und die rechte Seite ergibt $A_{\alpha\gamma} + g_{\alpha\beta\gamma}^{-1} dg_{\alpha\beta\gamma}$ (unter Berücksichtigung der Transformationsregeln für $A_{\alpha\beta}$). Zusammen ergibt sich Gleichung (I):

$$A_{\alpha\beta} + A_{\beta\gamma} = A_{\alpha\gamma} + g_{\alpha\beta\gamma}^{-1} dg_{\alpha\beta\gamma}.$$

Weiter gilt nach Konstruktion $F = \delta f$. Man folgert weiter:

$$\begin{aligned} \Rightarrow dA_{\alpha\beta} &= \sigma_{\alpha\beta}^* (s_\alpha, s_\beta)^* F = \sigma_{\alpha\beta}^* (s_\alpha, s_\beta)^* (\pi_1^* f - \pi_2^* f) \\ &= \sigma_{\alpha\beta}^* (s_\alpha^* f - s_\beta^* f) \\ &= s_\alpha^* \hat{f} - s_\beta^* \hat{f} \\ &= f_\alpha - f_\beta. \end{aligned}$$

Dies ist aber Gleichung (II). □

Aus der Definition der Dixmier-Douady-Form $\frac{\omega}{2\pi i}$ sieht man, daß $\omega|_{U_\alpha} = df_\alpha$. Man beachte, daß wegen $f_\alpha - f_\beta = dA_{\alpha\beta}$ gilt:

$$df_\alpha|_{U_\beta} = df_\beta|_{U_\alpha}.$$

Damit ist ω als globale 2-Form wohldefiniert. Weiterhin ist $[\omega] \in H_{dR}^3(X, \mathbb{R})$ unabhängig von der Wahl von ∇ , da der Zusammenhang nur über die Krümmung eingeht und die zugehörigen Dixmier-Douady-Formen sich damit nur um eine exakte Form unterscheiden (siehe oben).

Definition 5.6: Sei $([f_\alpha, A_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta\gamma}])_{\alpha, \beta, \gamma \in I}$ eine Familie von Tripeln zu gegebenen $([g_{\alpha\beta\gamma}])_{\alpha, \beta, \gamma \in I} \in \check{H}^3(X, \mathbb{Z})$. Die Dixmier-Douady-Form $\frac{\check{\omega}}{2\pi i}$ wird dann definiert durch $df_\alpha = \check{\omega}|_{U_\alpha} \forall \alpha \in I$.

Lemma 5.7: $\frac{\check{\omega}}{2\pi i}$ hängt nicht von der konkreten Wahl des Repräsentanten $g_{\alpha\beta\gamma}$ ab.

Beweis Ein Repräsentant aus $[g_{\alpha\beta\gamma}]$ unterscheidet sich von $g_{\alpha\beta\gamma}$ nur um einen Korand $c_{\alpha\beta}$ im Čechschen Sinne:

$$\tilde{g}_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\beta\gamma} c_{\alpha\beta} c_{\beta\gamma} c_{\alpha\gamma}^{-1}.$$

Es ist damit

$$\begin{aligned} d_0 \tilde{g}_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{\tilde{g}_{\alpha\beta\gamma}} d \tilde{g}_{\alpha\beta\gamma} \\ &= g_{\alpha\beta\gamma}^{-1} c_{\alpha\beta}^{-1} c_{\beta\gamma}^{-1} c_{\alpha\gamma} \{ (dg_{\alpha\beta\gamma}) c_{\alpha\beta} c_{\beta\gamma} c_{\alpha\gamma}^{-1} \\ &\quad + g_{\alpha\beta\gamma} dc_{\alpha\beta} c_{\beta\gamma} c_{\alpha\gamma}^{-1} + g_{\alpha\beta\gamma} c_{\alpha\beta} dc_{\beta\gamma} c_{\alpha\gamma}^{-1} + g_{\alpha\beta\gamma} c_{\alpha\beta} c_{\beta\gamma} dc_{\alpha\gamma}^{-1} \} \\ &= g_{\alpha\beta\gamma}^{-1} dg_{\alpha\beta\gamma} + c_{\alpha\beta}^{-1} dc_{\alpha\beta} + c_{\beta\gamma}^{-1} dc_{\beta\gamma} + c_{\alpha\gamma}^{-1} dc_{\alpha\gamma}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\alpha\beta} + \tilde{A}_{\beta\gamma} - \tilde{A}_{\alpha\gamma} &= d_0 \tilde{g}_{\alpha\beta\gamma} = d_0 g_{\alpha\beta\gamma} + d_0 (c_{\alpha\beta} c_{\beta\gamma} c_{\alpha\gamma}^{-1}) \\ &= A_{\alpha\beta} + A_{\beta\gamma} - A_{\alpha\gamma} + d_0 (c_{\alpha\beta} c_{\beta\gamma} c_{\alpha\gamma}^{-1}). \end{aligned}$$

Unter der Abbildung d auf beiden Seiten wird dies zu

$$\begin{aligned} d(\tilde{A}_{\alpha\beta} + \tilde{A}_{\beta\gamma} - \tilde{A}_{\alpha\gamma}) &= d(A_{\alpha\beta} + A_{\beta\gamma} - A_{\alpha\gamma}) + \underbrace{d d_0}_{=0} (c_{\alpha\beta} c_{\beta\gamma} c_{\alpha\gamma}^{-1}) \\ &= f_\alpha - f_\beta + f_\beta - f_\gamma - f_\gamma + f_\alpha = 2f_\alpha - 2f_\gamma. \end{aligned}$$

Andererseits ist nach Definition der Tripel

$$d(\tilde{A}_{\alpha\beta} + \tilde{A}_{\beta\gamma} - \tilde{A}_{\alpha\gamma}) = \tilde{f}_\alpha - \tilde{f}_\beta + \tilde{f}_\beta - \tilde{f}_\gamma - \tilde{f}_\gamma + \tilde{f}_\alpha = 2\tilde{f}_\alpha - 2\tilde{f}_\gamma.$$

Auf $U_\alpha \cap U_\beta$ gilt demzufolge

$$\tilde{f}_\alpha - \tilde{f}_\gamma = f_\alpha - f_\gamma.$$

Sei $\tilde{f}_\alpha - f_\alpha = \Delta_\alpha$. Dann folgt

$$\Delta_\alpha|_{U_\gamma} = \Delta_\gamma|_{U_\alpha},$$

und man erhält

$$\check{\omega}|_{U_\alpha} = d\tilde{f}_\alpha = df_\alpha + d\Delta_\alpha = \check{\omega}|_{U_\alpha} + d\Delta|_{U_\alpha},$$

wobei $\Delta|_{U_\alpha} = \Delta_\alpha$. Somit gilt $\check{\omega} \in [\check{\omega}]$. □

Kapitel 6

Spektralfluß, Index und Gerbes

6.1 Spektralfluß über \mathcal{A}

Im Kapitel 2 hatten wir an einem einfachen Beispiel das Auftreten eines Spektralflusses bei adiabatischer Änderung des Vektorpotentials beobachtet. Dies soll jetzt genauer untersucht werden. Sei dazu ein $A_0 \in \mathcal{A}$ fixiert, für das 0 nicht im Spektrum des Diracoperators zu A_0 liegt. Sei A ein beliebiger Punkt in \mathcal{A} . Da \mathcal{A} ein affiner Vektorraum ist, findet man Kurven, die A mit A_0 verbinden. Ein Beispiel ist

$$c_1 : t \mapsto A(t) := A_0 f(t) + (1 - f(t)) A,$$

wo $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine glatte Abbildung mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ sein soll. Sei nun λ eine reelle Zahl, die nicht im Spektrum von \mathcal{D}_A liegt. Es sei weiter $H_{A,\lambda}^+$ der Unterraum des 1-Teilchen-Hilbertraums H zu den Eigenwerten von \mathcal{D}_A größer als λ , und $H_{A,\lambda}^-$ dessen Komplement in $H = H_{A,\lambda}^+ \oplus H_{A,\lambda}^-$. Genauso bezeichne $H^+ := H_{A_0,0}^+$ und $H^- := H_{A_0,0}^-$ die Zerlegung von H bezüglich des Diracoperators zu A_0 , für den ja Null nicht im Spektrum enthalten war. Sei nun $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Basis von Eigenvektoren zu \mathcal{D}_A in $H_{A,\lambda}^+$. Über die Zeitentwicklung

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_n(t) = \mathcal{D}_{A(t)} \psi_n(t) \quad (6.1.1)$$

mit $\psi_n(0) = \psi_n$, erhält man Vektoren $\phi_n = \psi_n(1)$ in H . Diese spannen einen Unterraum $W_{A,\lambda}$ auf. Bezeichne π^+ die Projektion von $W_{A,\lambda}$ auf H^+ . Es ist nun $\ker \pi^+ \neq \emptyset$. Die folgende Rechnung zeigt, daß hier $\dim \ker \pi^+ < \infty$ gelten muß:

Sei dazu ψ_n eine Eigenbasis zu \mathcal{D}_{A_0} mit Eigenwerten E_n . Der zeitabhängige Diracoperator $\mathcal{D}_{A(t)}$ läßt sich zerlegen in einen zeitunabhängigen Anteil und einen Multiplikationsoperator:

$$\mathcal{D}_{A(t)} = \mathcal{D}_{A_0} + (1 - f(t))A - (1 - f(t))A_0 =: \mathcal{D}_{A_0} + \tilde{f}(t)\tilde{A}.$$

Nun entwickelt man $\psi_n(t)$ nach der Basis mit zeitlich veränderlichen Koeffizienten

$$\psi_n(t) = a_n(t) \Psi_n,$$

und setzt dies in die Zeitentwicklung (6.1.1) ein:

$$\dot{a}_n(t) \Psi_n = a_n(t) (E_n + \tilde{f}(t) \tilde{A}) \Psi_n.$$

Es ergibt sich damit eine Differentialgleichung für die $a_n(t)$

$$\dot{a}_n(t) = a_n(t) (E_n + \tilde{f}(t) \tilde{A}),$$

die man mit dem Ansatz

$$a_n(t) = C e^{E_n t + \int_0^t d\tau \tilde{f}(\tau) \tilde{A}}$$

löst. Liegt nun zum Zeitpunkt $t = 1$ ein Eigenzustand ψ_n zu \mathcal{D}_{A_0} vor, so gilt $a_{n'}(t) = 0$ für $n' \neq n$ und alle Zeiten t . Man berechnet also

$$\begin{aligned} & | \langle \psi_n(0), \mathcal{D}_{A_0} \psi_n(0) \rangle - \langle \psi_n(1), \mathcal{D}_A \psi_n(1) \rangle | \\ &= | \langle \psi_n(0), \mathcal{D}_{A_0} \psi_n(0) \rangle - |a_n(1)|^2 \langle \psi_n(0), \mathcal{D}_A \psi_n(0) \rangle | \\ &= | (1 - |a_n(1)|^2) \langle \psi_n, \mathcal{D}_{A_0} \psi_n \rangle + |a_n(1)|^2 \tilde{f} \langle \psi_n, \tilde{A} \psi_n \rangle | \\ &\leq | (1 - |a_n|^2 E_n + |a_n|^2 \|\tilde{A}\|) | \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung ergibt sich aus der Kompaktheit von M . Über kompakten Mannigfaltigkeiten ist das Spektrum des Diracoperators aber diskret und von endlicher Vielfachheit für jeden Eigenwert. Folglich können nur endlich viele Eigenvektoren ψ_n im Laufe der Zeitentwicklung von H^+ nach $H_{A,\lambda}^-$ gelangen.

Betrachtet man einen zweiten Weg c_2 zwischen A_0 und $\Phi(A)$ ($\Phi \in \mathcal{G}$), also einem zu A eichäquivalenten Punkt, so ist die Anzahl der Zustände, die entlang der Komposition $c_1 \circ c_2^{-1}$ beider Wege von $H_{A,\lambda}^+$ nach $H_{\Phi(A),\lambda}^-$ abgebildet werden, minus die Zahl derer, die von $H_{\Phi(A),\lambda}^-$ nach $H_{A,\lambda}^+$ fließen, gleich

$$\begin{aligned} & \stackrel{(1)}{(\dim \ker \pi_1^+ - \dim \ker \pi_2^+ \cap W_{A,\lambda})} - \stackrel{(3)}{(\dim \ker \pi_1^+ - \dim \ker \pi_2^+ \setminus W_{A,\lambda})} \\ & \quad - \stackrel{(5)}{(\dim \ker \pi_2^+ \setminus W_{A,\lambda})} + \stackrel{(6)}{(\dim \ker \pi_2^+ \cap W_{A,\lambda})}. \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

(Die Indizes 1,2 sollen hierbei auf die Wege c_1, c_2 verweisen.) Dabei ist der Term in der ersten Klammer die Dimension des Raumes, der von $H_{A,\lambda}^+$ auf H^- und *nicht*

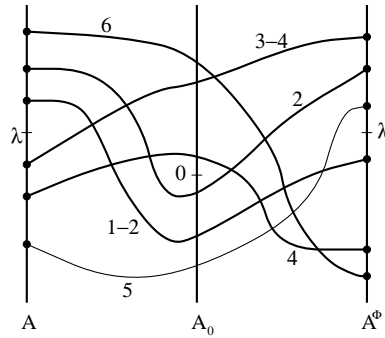


Abbildung 6.1: Spektralfluß. In vertikaler Richtung ist die Energieskala des Diracoperators aufgetragen. Jede Linie repräsentiert einen Beitrag in (6.1.2) als Zeitenwicklung der Ausgangszustände.

von H^- auf $H_{A,\lambda}^+$ abgebildet wird usw. Bild 6.1 soll die Verhältnisse verdeutlichen. Obiger Ausdruck läßt sich nun zusammenfassen und umformen zu:

$$(\dim \ker \pi_1^+ - \dim \operatorname{koker} \pi_1^+) - (\dim \ker \pi_2^+ - \dim \operatorname{koker} \pi_2^+).$$

Im Beispiel aus Kapitel 2 wäre dieser Ausdruck gleich 1, wobei A_0 dort zu $t_0 A$ für ein t_0 gewählt werden kann. Man sieht auch, daß dieser Ausdruck von der Richtung, in der man die Kurve durchläuft, abhängt. Erwartungsgemäß ändert sich genau das Vorzeichen.

Zurück zur Kurve c_1 . Sei zunächst $\dim \ker \pi^+ - \dim \operatorname{koker} \pi^+ =: k \geq 0$. Wählt man nun eine Basis $\{e_i\}_{i \in \mathbb{Z} \setminus 0}$ in H so, daß H^+ von Vektoren mit positivem Index aufgespannt wird, so kann man einen Isomorphismus

$$W \leftrightarrow H_k := \operatorname{span}\{e_i\}_{i \geq -k}$$

konstruieren: Auf $W \setminus \ker \pi^+$ ist π^+ Isomorphismus auf $H^+ \setminus \operatorname{koker} \pi^+$. Es seien $\{u_i\}_{i=1, \dots, r}$ bzw. $\{v_i\}_{i=1, \dots, r-k}$ Basen in $\ker \pi^+$ bzw. $\operatorname{koker} \pi^+$. Man erhält dann einen Isomorphismus, indem man $\pi^+|_{W \setminus \ker \pi^+}$ ergänzt durch

$$\begin{aligned} u_i &\mapsto v_i & i = 1, \dots, r-k \\ u_i &\mapsto e_{i-r} & i = r-k+1, \dots, r. \end{aligned}$$

Ist $k \leq 0$, so findet man auf gleiche Weise einen Isomorphismus

$$W \leftrightarrow H_k := \operatorname{span}\{e_i\}_{i \geq -k} \subset H^+.$$

Dieser Isomorphismus hängt natürlich von der Wahl der Basen $\{u_i\}$ und $\{v_i\}$ ab. Ein Basiswechsel in $\ker \pi^+$ bzw. $\operatorname{koker} \pi^+$ wirkt sich als komplexer Faktor in

$\bigwedge \ker \pi^+$ bzw. $\bigwedge \text{koker} \pi^+$ aus, allerdings ändert eine simultane Transformation in $\text{koker} \pi^+$ und $\text{span}\{u_i\}_{i=1, \dots, r-k}$ (also dem Teil von $\ker \pi^+$, der auf $\text{koker} \pi^+$ abgebildet wird) nichts. Deshalb definiert man

$$IND_{A,\lambda} := \left(\bigwedge \ker \pi^+ \right)^* \otimes \bigwedge \text{koker} \pi^+,$$

und beschreibt damit die Menge der möglichen Isomorphismen modulo unitäre Äquivalenz. Man erhält also ein \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel $(IND, \mathcal{A}_0, *)$ über \mathcal{A}_0 .

Sei jetzt $\lambda > \mu$ und $H_{A,\mu}^+ \cap H_{A,\lambda}^- =: V_{(A,\lambda,\mu)}$ wie in Kapitel 2. Wie oben bekommt man wieder einen Unterraum $W_{A,\mu}$ in H und eine Projektion $\pi_{A,\mu}^+$ auf H^+ . Sei $\dim V_{(A,\lambda,\mu)} = d$ und $\{f_i\}_{i=1, \dots, d}$ eine Basis in $V_{(A,\lambda,\mu)}$. Wir betrachten wieder das Bild dieser Basis unter der Deformation $A \mapsto A_0$. Elemente aus $V_{(A,\lambda,\mu)}$ können entweder in H^+ oder H^- landen. Im ersten Fall gehören sie zu $\text{koker} \pi_{A,\lambda}^+$, im zweiten zu $\ker \pi_{A,\mu}^+$. Sei $V_{(A,\lambda,\mu)}^\pm$ der Anteil, der nach H^\pm abgebildet wird, dann gilt

$$\begin{aligned} \ker \pi_{A,\mu}^+ &= \ker \pi_{A,\lambda}^+ \oplus V_{(A,\lambda,\mu)}^- \\ \ker \pi_{A,\lambda}^+ &= \ker \pi_{A,\mu}^+ \oplus V_{(A,\lambda,\mu)}^+. \end{aligned}$$

Eine Basistransformation in $V_{(A,\lambda,\mu)}$ bestimmt damit einen Basiswechsel in $\ker \pi_{A,\mu}^+$ bzw. $\text{koker} \pi_{A,\lambda}^+$, läßt aber $\ker \pi_{A,\lambda}^+$ bzw. $\text{koker} \pi_{A,\mu}^+$ unverändert. Mit anderen Worten bewirkt ein Basiswechsel in $V_{(A,\lambda,\mu)}$ einen komplexen Faktor in

$$\begin{aligned} &\bigwedge \ker \pi_{A,\mu}^+ \otimes \left(\bigwedge \ker \pi_{A,\lambda}^+ \right)^* \otimes \bigwedge \text{koker} \pi_{A,\lambda}^+ \otimes \left(\bigwedge \text{koker} \pi_{A,\mu}^+ \right)^* = \\ &= \bigwedge \ker \pi_{A,\mu}^+ \otimes \left(\bigwedge \text{koker} \pi_{A,\mu}^+ \right)^* \otimes \left(\bigwedge \ker \pi_{A,\lambda}^+ \right)^* \otimes \bigwedge \text{koker} \pi_{A,\lambda}^+ = \\ &= IND_{A,\mu}^* \otimes IND_{A,\lambda}. \end{aligned}$$

Andererseits beschreibt ein Basiswechsel in $V_{(A,\lambda,\mu)}$ ein Element in $DET_{(A,\lambda,\mu)}$, also gilt

$$DET_{(A,\lambda,\mu)} = (IND_{A,\lambda})^* \otimes IND_{A,\mu}. \quad (6.1.3)$$

Nun ist aber \mathcal{A} kontrahierbar, d.h. eine Trivialisierung des Gerbe

$$(DET, \mathcal{A}_0, \mathcal{A}, \circ)$$

existiert nach Lemma (3.8). Nach der Eindeutigkeit aus Lemma (3.7) ist diese Trivialisierung gleich IND .

6.2 Indexbündel und Familienindex

Im vorigen Kapitel hatten wir den Parameter t , der die Änderung des Vektorpotentials $A(t)$ beschrieb, als eine Art Zeitentwicklung des Systems angesehen. Nun wollen wir einen statischen Blickpunkt einnehmen.

Sei $\underline{M} := M \times [0, 1]$ eine Mannigfaltigkeit gerader Dimension $2n + 2$ und \underline{H} der Hilbertraum der L_2 -Funktionen über \underline{M} mit Werten im zugeordneten Spinorenbündel $\underline{\Delta}$ und dem Darstellungsraum einer zusätzlichen Freiheit $\underline{\mathbb{C}}^N$,

$$\underline{H} := L_2(\underline{M}) \otimes \underline{\Delta} \otimes \underline{\mathbb{C}}^N.$$

Das Spinorenbündel ist also trivial in t -Richtung. Seien weiter $H_t := \underline{H}|_{M \times \{t\}}$ alle auf $M \times \{t\}$ eingeschränkten Funktionen aus \underline{H} . Jedes H_t ist damit gleich \underline{H} , dem ursprünglich betrachteten 1-Teilchen-Hilbertraum. Das Skalarprodukt auf \underline{H} ist gegeben durch das Skalarprodukt in H : Seien $\psi, \phi \in \underline{H}$,

$$\langle \psi, \phi \rangle := \int_0^1 dt \langle \psi|_{M \times \{t\}}, \phi|_{M \times \{t\}} \rangle.$$

Da das Spinorenbündel in t -Richtung trivial ist, wählt man den neuen Diracoperator $\underline{\mathcal{D}}_{\{A\}}$ zu

$$\underline{\mathcal{D}}_{\{A\}} := \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{D}_{A(t)}.$$

Dabei meint $\mathcal{D}_{A(t)}$, daß man aus einer Wellenfunktion in \underline{H} deren Bild gewinnt, in dem man auf jede t -Komponente die Ableitung „in M -Richtung“ mittels $\mathcal{D}_{A(t)}$ bildet. $\mathcal{D}_{A(t)}$ ist der Diracoperator über M zu $A(t)$.

Wir wollen nun den Kern von $\underline{\mathcal{D}}_{\{A\}}$ in Beziehung setzen zum Kern von π^+ aus dem vorigen Kapitel. Dazu als Service noch einmal Gleichung (6.1.1):

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_n(t) = \mathcal{D}_{A(t)} \psi_n(t). \quad (6.1.1)$$

Der Kern von π^+ enthielt alle diejenigen Familien $\{\psi(t)\}_{t \in [0,1]}$ von Funktionen aus H , welche die Zeitentwicklung (6.1.1), $\psi(1) \in H_{A,\lambda}^+$ und $\psi(0) \in H^-$ erfüllen. Nun werden wir einen Unterraum von \underline{H} definieren, der auf dem Rand von \underline{M} obigen Bedingungen genügt. Sei also

$$\tilde{\underline{H}} := \left\{ \psi \in \underline{H} \mid \psi|_{M \times \{0\}} \in H^-, \psi|_{M \times \{1\}} \in H_{A,\lambda}^+ \right\} \quad (6.2.4)$$

der Definitionsbereich des Diracoperators, $\mathfrak{D}(\underline{\mathcal{D}}_{\{A\}}) := \tilde{\underline{H}}$. Damit entspricht jedes Element des Kerns von $\underline{\mathcal{D}}_{\{A\}}$ genau einer Familie $\{\psi(t)\}_{t \in [0,1]}$ von Funktionen aus H , die zu $\ker \pi^+$ assoziiert waren.

Betrachten wir nun den zu $\underline{\mathcal{D}}_{\{A\}}$ adjungierten Operator. Die Bestimmungsgleichung für $\text{Graph} \underline{\mathcal{D}}_{\{A\}}^*$ lautet ($\phi, \chi \in H$):

$$\langle \chi, \underline{\mathcal{D}}_{\{A\}} \psi \rangle = \langle \phi, \psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\underline{\mathcal{D}}_{\{A\}}) \subset H \iff (\chi, \phi) \in \text{Graph} \underline{\mathcal{D}}_{\{A\}}^*.$$

Sei also speziell $\chi \in \ker \underline{\mathcal{D}}_{\{A\}}^*$, dann gilt:

$$\langle \chi, \underline{\mathcal{D}}_{\{A\}} \psi \rangle = \langle 0, \psi \rangle = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\underline{\mathcal{D}}_{\{A\}}).$$

Demzufolge ist χ aus $(\text{Im} \underline{\mathcal{D}}_{\{A\}})^\perp$. Nun ist $\underline{\mathcal{D}}_{\{A\}} \upharpoonright_{H_t} = \mathcal{D}_{A(t)}$, also

$$(\text{Im} \underline{\mathcal{D}}_{\{A\}}) \upharpoonright_{M \times \{t\}} = \text{Im} \mathcal{D}_{A(t)}.$$

Bei $t = 1$ ist dies gleich $H_{A,\lambda}^+$ (wähle Eigenbasis von $\mathcal{D}_{A(t)}$ in H) und bei $t = 0$ gleich H^- (beides wegen der Randbedingungen von (6.2.4)). Damit ist

$$\ker \underline{\mathcal{D}}_{\{A\}}^* \upharpoonright_{M \times \{1\}} = (\text{Im} \underline{\mathcal{D}}_{\{A\}})^\perp \upharpoonright_{M \times \{1\}} = \text{Im} \mathcal{D}_A^\perp = H_{A,\lambda}^-$$

und

$$\ker \underline{\mathcal{D}}_{\{A\}}^* \upharpoonright_{M \times \{0\}} = \text{Im} \mathcal{D}_{A_0}^\perp = H^+.$$

Also besteht eine 1-1-Korrespondenz zwischen $\ker \underline{\mathcal{D}}_{\{A\}}^* = \text{koker} \underline{\mathcal{D}}_{\{A\}}$ und dem Kokern von π^+ .

Zusammenfassend liegt also die Situation einer Mannigfaltigkeit gerader Dimension mit Rand vor. Die eben durchgeführte Konstruktion hängt nun nicht nur vom gewählten Punkt A in \mathcal{A} , sondern auch (über die Randbedingungen in (6.2.4)) vom gewählten Wert λ in $H^\pm : A, \lambda$ ab. Das bedeutet aber nichts anderes, als daß man sich über \mathcal{A}_0 befindet. Hier erhält man dann auch durch Bildung von $\ker \underline{\mathcal{D}}$ – $\text{koker} \underline{\mathcal{D}}$ das Indexbündel zu $\underline{\mathcal{D}}$. Die Differenz ist im Sinne der K-Theory zu verstehen. Obwohl die Dimension von $\ker \underline{\mathcal{D}}$ bzw. $\text{koker} \underline{\mathcal{D}}$ bei stetiger Variation von A springen kann, bleibt die Dimension der Differenz konstant, der Index hängt nämlich stetig von A ab. Damit erhält man über jeder Zusammenhangskomponente von \mathcal{A}_0 das zugeordnete Determinantenbündel, welches gleich IND ist,

$$\begin{aligned} IND_{A,\lambda} &= \left(\ker \pi_{A,\lambda}^+ \right)^* \otimes \text{koker} \pi_{A,\lambda}^+ \\ &= \left(\ker \underline{\mathcal{D}}_{\{A\},\lambda} \right)^* \otimes \text{koker} \underline{\mathcal{D}}_{\{A\},\lambda}. \end{aligned}$$

6.3 Dixmier-Douady-Form und Krümmung in IND

Im ersten Kapitel dieses Abschnitts hatten wir gesehen, daß IND das trivialisierende \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel über \mathcal{A}_0 zum Gerbe $(DET, \mathcal{A}_0, \mathcal{A}, \circ)$ ist. Das bedeutete aber konkret

$$DET_{(A, \lambda, \mu)} = \delta (IND)_{(A, \lambda, \mu)} = \pi_1^* IND_{A, \lambda}^* \otimes \pi_2^* IND_{A, \mu}.$$

Sei nun ∇_{IND} ein Zusammenhang und F_{IND} dessen Krümmung in IND . Man erhält damit einen Zusammenhang $\delta \nabla_{IND}$ in DET und dessen Krümmung F_{IND} . (Für komplexe Linienbündel entsteht die Krümmung aus dem Zusammenhang durch die äußere Ableitung, welche aber mit δ vertauscht.) Sei weiter ∇ ein Gerbezusammenhang in $DET^{\mathcal{G}}$ und F_{∇} dessen Krümmung.

$$p : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$$

war die Projektion entlang der Eichorbits, also wird $p^* F_{\nabla}$ auch eine Krümmung über $\mathcal{A}_0^{[2]}$ sein. Für die Differenz der beiden Zusammenhänge gilt jedoch

$$\begin{aligned} \delta (p^* \nabla - \delta \nabla_{IND}) &= p^* \delta \nabla - \delta \delta \nabla_{IND} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet, daß p und π (die Projektion, die die Zahl λ vergißt) miteinander vertauschen, da das Spektrum der Diracoperatoren unter Eichtransformationen invariant bleibt. Weiterhin galt für Gerbezusammenhänge $\delta \nabla = 0$ und außerdem war $\delta^2 = 0$. Da die δ -Kohomologie trivial ist (siehe Anhang D), muß es also eine 1-Form ψ über \mathcal{A}_0 geben mit

$$\delta d\psi = p^* F_{\nabla} - \delta F_{IND}. \quad (6.3.5)$$

Für Gerbezusammenhänge ∇ verschwindet aber auch δF_{∇} , es existiert also eine 2-Form f über $\mathcal{A}_0/\mathcal{G}$ mit (vgl. den Abschnitt 5.2)

$$F_{\nabla} = \delta f.$$

Setzt man dies in (6.3.5) ein, so ergibt sich

$$\delta p^* f = \delta F_{IND} + \delta d\psi,$$

also findet man eine 2-Form ρ auf \mathcal{A} mit

$$p^* f = F_{IND} + d\psi + \delta \rho. \quad (6.3.6)$$

Die Dixmier-Douady-Form ω war aber über f definiert (siehe (5.2.1))

$$df = \pi^* \omega.$$

$p^* \omega$ ist demnach eine geschlossene 3-Form über \mathcal{A} . Da \mathcal{A} kontrahierbar ist, verschwindet die deRham'sche Kohomologie, es findet sich also eine 2-Form μ mit

$$p^* \omega = d\mu.$$

Setzt man dies zusammen mit Gleichung (6.3.6), so erhält man

$$\begin{aligned} \pi^* d\mu &= p^* \pi^* \omega \\ &= p^* df \\ &= dF_{IND} + d^2\psi + \pi^* d\rho \\ &= \pi^* d\rho \end{aligned}$$

und damit (wieder wegen der Trivialität der Kohomologie über \mathcal{A})

$$[\mu] = [\rho].$$

Seien nun ξ, η zwei fundamentale Vektorfelder auf \mathcal{A} zur Gruppenwirkung \mathcal{G} . Setzt man diese in (6.3.6) ein, so sieht man

$$\pi^* \rho(\xi, \eta) \sim -F_{IND}(\xi, \eta) - d\psi(\xi, \eta),$$

die Transgression der Dixmier-Douady-Form ω ist also kohomologisch äquivalent zum negativen der Krümmung in IND .

Kapitel 7

Schwinger-Terme

7.1 Zusammenhangsform in \mathcal{A}

Da wir die punktierte Gruppe der Eichtransformationen gewählt haben, wird

$$\{\mathcal{A}, \mathcal{A}/\mathcal{G}, \mathcal{G}\}$$

ein Hauptfaserbündel. \mathcal{A} ist ein affiner Vektorraum, wir können also den Tangentialraum an einen Punkt A_0 mit dem Vektorraum identifizieren, der entsteht, wenn man jedem Element B aus \mathcal{A} die Differenz $b := B - A_0$ zuordnet. Seien also a, b aus $T_{A_0}\mathcal{A}$. a und b kann man dann auch als Schnitte im zum G -Hauptfaserbündel P assoziierten Vektorbündel

$$\mathfrak{G}_E := P \times_{Ad} \mathfrak{G}$$

mit typischer Faser \mathfrak{G} und adjungierter Darstellung vorstellen. Es existiert dann eine Metrik

$$\langle a, b \rangle := \int_{\mathcal{M}} tr. \{a \wedge *b\},$$

wobei der Hodge-Stern von der Metrik auf \mathcal{M} induziert wird und $tr.$ die Killing-Metrik auf der Liealgebra \mathfrak{G} der Lie-Gruppe \mathcal{G} meint. Da \mathcal{G} auf Elementen aus dem Tangentialraum $T_{A_0}\mathcal{A}$ durch Konjugation wirkt,

$$\mathcal{G} \ni \phi : a \mapsto \phi^{-1}a\phi$$

ist diese Metrik invariant unter der Wirkung von \mathcal{G} .

Als nächstes berechnen wir zu einem Generator $\xi \in Lie\mathcal{G}$ das zugehörige fundamentale Vektorfeld. ξ erzeugt eine einparametrische Gruppe $(u_t)_{t \in I}$ aus \mathcal{G} . Wir müssen demnach als erstes wissen, wie \mathcal{G} auf \mathcal{A} operiert. Dazu sei bemerkt, daß eine

Eichtransformation u auf einem zu P assoziierten Vektorbündel $E := P \times_{\rho} F$ (mit typischer Faser F und Darstellung ρ) faserweise als Element aus $End F$ wirkt, also einen Schnitt in $End E = E \otimes E^*$ darstellt. Sei A nun ein Zusammenhang, der eine kovariante Ableitung ∇_A im Vektorbündel E definiert. Ebenso hat man eine kovariante Ableitung in \mathcal{G}_E , die hier auch mit ∇_A bezeichnet werden soll. Sei s ein Schnitt in E . Nun definiert man

$$\nabla_{u(A)}s := u\nabla_A u^{-1}s.$$

Berechnet man die rechte Seite unter Beachtung von

$$0 = \nabla_A (uu^{-1}) = (\nabla_A u)u^{-1} + u(\nabla_A u^{-1}),$$

so erhält man die \mathcal{G} -Wirkung

$$u(A) = A - (\nabla_A u)u^{-1}.$$

Sei also u_t eine von ξ erzeugte Kurve in \mathcal{G} mit Orbit $u_t(A_0)$. Für den Tangentialvektor dieses Orbits in A_0 ergibt sich

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} u_t(A_0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(A_0 - (\nabla_{A_0} u_t) u_t^{-1} \right) = -\nabla_{A_0} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} u_t \right).$$

Also ist

$$\nabla_{A_0} : \Omega^0(\mathfrak{G}_E) \rightarrow \Omega^1(\mathfrak{G}_E) \cong T_{A_0}\mathcal{A}$$

die gesuchte Abbildung, die einem Liealgebraelement aus $Lie\mathcal{G}$ das zugehörige fundamentale Vektorfeld zuordnet. Nun hat man auf $T\mathcal{A}$ eine Metrik gegeben, bezüglich derer man den zu ∇ adjungierten Operator:

$$\langle a, \nabla_{A_0} b \rangle := \langle \nabla_{A_0}^* a, b \rangle, \quad a \in \Omega^0(\mathfrak{G}_E), b \in \Omega^1(\mathfrak{G}_E).$$

Sei nun der horizontale Teilraum in der Zerlegung

$$T_{A_0}\mathcal{A} = H_{A_0}\mathcal{A} \oplus V_{A_0}\mathcal{A},$$

definiert als orthogonal zum vertikalen,

$$H_{A_0}\mathcal{A} := \left\{ a \in \Omega^1(\mathfrak{G}_E) \mid \langle a, \nabla_{A_0} \xi \rangle = 0 \quad \forall \xi \in Lie\mathcal{G} \right\}$$

Daraus folgt

$$\langle \xi, \nabla_{A_0}^* b \rangle = 0 \quad \forall \xi \in Lie\mathcal{G}.$$

Also gilt für horizontale Tangentialvektoren b in der Hintergrundeichung,

$$\nabla_{A_0}^* b = 0 \quad \forall b \in H_{A_0} \mathcal{A}.$$

Obige Ausführungen legen nahe, die Zusammenhangs-1-Form auf \mathcal{A} als

$$\omega_{(A)}(\cdot) := -G_A \nabla_A^*(\cdot) \quad (7.1.1)$$

zu definieren. Dabei ist G_A der inverse Operator¹ zu $\nabla_A^* \nabla_A$. Für fundamentale Vektorfelder ergibt sich damit das generierende Liealgebraelement, wie man aus obiger Rechnung leicht sieht. Weiterhin verschwindet ω auf horizontalen Vektoren. Es bleibt also nur noch zu prüfen, daß ω äquivariant ist,

$$\omega_{\Phi(A)}(\Phi_* \cdot) = (Ad\Phi) \omega_{(A)}(\cdot) \quad (7.1.2)$$

für alle Eichtransformationen Φ . Formuliert man dies für den expliziten Ausdruck (7.1.1), so ist dies gleichbedeutend mit

$$\Phi_* (\nabla_A \xi) = \nabla_{\Phi(A)} ((Ad\Phi) \xi).$$

Zu diesem Ende müssen wir erst eine kleine Nebenrechnung durchführen. Seien Ψ, Φ Eichtransformationen. Dann gilt, wie oben definiert, für Schnitte s in E :

$$\begin{aligned} \nabla_{(\Psi(\Phi(A)))} s &= \Psi \nabla_{\Phi(A)} (\Psi^{-1} s) \\ &= \Psi (\nabla_{\Phi(A)} \Psi^{-1}) s + \Psi \Psi^{-1} \nabla_{\Phi(A)} s \\ &= \Psi (\nabla_{\Phi(A)} \Psi^{-1}) s + \Phi (\nabla_A \Phi^{-1}) s + \nabla_A s, \end{aligned}$$

woraus man die Transformationsformel für A erhält zu

$$\Psi (\Phi(A)) = A - (\nabla_A \Phi) \Phi^{-1} - (\nabla_{\Phi(A)} \Psi) \Psi^{-1}.$$

Andererseits läßt sich die erste Zeile auch anders zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \nabla_{(\Psi(\Phi(A)))} s &= \Psi \nabla_{\Phi(A)} (\Psi^{-1} s) \\ &= \Psi \Phi \nabla_{\Phi(A)} (\Phi^{-1} \Psi^{-1} s) \\ &= \Psi \Phi \nabla_A (\Phi^{-1}) \Psi^{-1} s + \Psi \Phi \Phi^{-1} \nabla_A (\Psi^{-1}) s \\ &\quad + \Psi \Phi \Phi^{-1} \Psi^{-1} \nabla_A s \\ &= \Psi \Phi \nabla_A (\Phi^{-1}) \Psi^{-1} s + \Psi \nabla_A (\Psi^{-1}) s + \nabla_A s. \end{aligned}$$

¹Zu dessen Existenz läßt sich folgendes sagen: Hat man ein $\xi \in Lie\mathcal{G}$ mit $\nabla_A^* \nabla_A \xi = 0$, dann gilt:

$$\langle \nabla_A^* \nabla_A \xi, \xi \rangle = 0 \iff \langle \nabla_A \xi, \nabla_A \xi \rangle = 0,$$

also ist $\nabla_A \xi = 0$. $\nabla_A \xi$ ist aber gerade das fundamentale Vektorfeld zu ξ und verschwindet damit nur, wenn die einparametrische Gruppe, die ξ generiert, auf \mathcal{A} trivial wirkt. Also ist ξ aus der Liealgebra des Stabilisators zu A , aber der bestand nur aus dem Einselement in \mathcal{G} . Folglich ist $\xi = 0$.

Es ergibt sich damit die Beziehung

$$\Psi(\Phi(A)) = A - (\nabla_A \Psi) \Psi^{-1} - \Psi (\nabla_A \Phi) \Phi^{-1} \Psi^{-1}.$$

Vergleich beider Transformationsformeln gibt

$$\begin{aligned} (\nabla_A \Phi) \Phi^{-1} + (\nabla_{\Phi(A)} \Psi) \Psi^{-1} &= \\ &= (\nabla_A \Psi) \Psi^{-1} + \Psi (\nabla_A \Phi) \Phi^{-1} \Psi^{-1}, \end{aligned}$$

und man erhält die folgende nützliche Formel

$$(\nabla_{\Phi(A)} \Psi) \Psi^{-1} = (\nabla_A \Psi) \Psi^{-1} + \Psi (\nabla_A \Phi) \Phi^{-1} \Psi^{-1} - (\nabla_A \Phi) \Phi^{-1}. \quad (7.1.3)$$

Betrachten wir nun noch kurz den Spezialfall $\Psi = \Phi u_t \Phi^{-1}$:

$$\begin{aligned} &(\nabla_{\Phi(A)} (\Phi u_t \Phi^{-1})) (\Phi u_t \Phi^{-1})^{-1} \\ &= (\nabla_A (\Phi u_t \Phi^{-1})) (\Phi u_t \Phi^{-1})^{-1} \\ &\quad + (\Phi u_t \Phi^{-1}) (\nabla_A \Phi) \Phi^{-1} (\Phi u_t \Phi^{-1})^{-1} - (\nabla_A \Phi) \Phi^{-1} \\ &= (\nabla_A \Phi) (u_t \Phi^{-1}) (\Phi u_t \Phi^{-1})^{-1} + \Phi (\nabla_A u_t) \Phi^{-1} (\Phi u_t \Phi^{-1})^{-1} \\ &\quad + \Phi u_t (\nabla_A \Phi^{-1}) (\Phi u_t \Phi^{-1})^{-1} \\ &\quad + (\Phi u_t \Phi^{-1}) (\nabla_A \Phi) \Phi^{-1} (\Phi u_t \Phi^{-1})^{-1} - (\nabla_A \Phi) \Phi^{-1} \\ &= (\nabla_A \Phi) \Phi^{-1} + \Phi (\nabla_A u_t) u_t^{-1} \Phi^{-1} + \Phi u_t \{ (\nabla_A \Phi^{-1}) \Phi \} u_t^{-1} \Phi^{-1} \\ &\quad + \Phi u_t \{ \Phi^{-1} (\nabla_A \Phi) \} u_t^{-1} \Phi^{-1} - (\nabla_A \Phi) \Phi^{-1}. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man nun

$$(\nabla_A \Phi^{-1}) \Phi = \Phi^{-1} (\nabla_A \Phi),$$

so lautet das Ergebnis

$$(\nabla_{\Phi(A)} (\Phi u_t \Phi^{-1})) (\Phi u_t \Phi^{-1})^{-1} = \Phi (\nabla_A u_t) u_t^{-1} \Phi^{-1}. \quad (7.1.4)$$

Sei jetzt wieder u_t eine Kurve in \mathcal{G} mit Tangente ξ in x_0 . $u_t(A)$ ist dann ein Orbit in \mathcal{A} durch A mit Tangente $-\nabla_A \xi$. Es gilt

$$\begin{aligned}
-\Phi_* (\nabla_A \xi) &= \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} u_t(A) \right) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi(u_t(A)) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\Phi(A) - \Phi((\nabla_A u_t) u_t^{-1})) \\
&= - \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi((\nabla_A u_t) u_t^{-1}) \\
&= - \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi(\nabla_A u_t) u_t^{-1} \Phi^{-1} \\
&\stackrel{7.1.4}{=} - \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\nabla_{\Phi(A)} (\Phi u_t \Phi^{-1})) (\Phi u_t \Phi^{-1})^{-1} \\
&= - \nabla_{\Phi(A)} ((Ad\Phi)\xi).
\end{aligned}$$

Damit ist (7.1.1) die richtige Form für den Zusammenhang in \mathcal{A} , der durch die kanonische L_2 -Metrik induziert wird.

7.2 Einschub: Familienindextheorem

Dieser Abschnitt ist aus [15] entnommen.

Sei T eine kompakte zusammenhängende Menge von Parametern. Dann erhält man eine Familie von Zusammenhängen $\underline{A} = \{A^\tau\}_{\tau \in T}$ in einem Vektorbündel $\underline{E} := E \times T$. Sei $\mathcal{D}_{\underline{A}}$ die zugehörige Familie von Dirac-Operatoren. Jeder Dirac-Operator \mathcal{D}_{A^τ} liefert eine Abbildung

$$\mathcal{D}_{A^\tau}^+ : \mathcal{V}_\tau := \Gamma(E_\tau \otimes V) \rightarrow \Gamma(E_\tau \otimes W) =: \mathcal{W}_\tau,$$

wobei V, W positiver bzw. negativer Halbspinorraum sind. L_τ ist Fredholm-Operator, wenn man den Raum der Schnitte mit einer geeigneten Sobolev-Norm versieht. Mit veränderlichem $\tau \in T$ erhält man eine Abbildung

$$\mathcal{D}_{\underline{A}}^+ : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}.$$

Ist nun $\mathcal{D}_{\underline{A}}^+$ surjektiv, so ist das Indexbündel gleich dem Vektorbündel $\text{Ker}(\mathcal{D}_{\underline{A}}^+)$. Im allgemeinen kann man dieses Konzept mit Hilfe der K-Theorie retten. Sei dazu ein $\tau \in T$ fixiert und $n_\tau := \dim \text{Koker}(\mathcal{D}_{A^\tau}^+)$. Nun wählt man eine Abbildung $\psi_\tau : \mathbb{C}^{n_\tau} \rightarrow \mathcal{W}_\tau$ mit der Eigenschaft $\text{Im } \psi_\tau = \text{Koker}(\mathcal{D}_{A^\tau}^+)$. Diese Abbildung läßt sich auch auf eine offene Umgebung U_τ von τ ausdehnen, da sich um τ eine Umgebung finden läßt, in der

$$\dim \text{Koker}(\mathcal{D}_{A^{\tau'}}^+) \geq \dim \text{Koker}(\mathcal{D}_{A^\tau}^+) \quad \forall \tau' \in U_\tau$$

ist (Das Spektrum von \mathcal{D}_{A_τ} ist abgeschlossen). Da T kompakt ist, hat man eine endliche Überdeckung mit derartigen Mengen U_τ , und man erhält mit einer Zerlegung der Eins und $N = \sum n_\tau$ eine Abbildung

$$\mathcal{D}_A^+ \oplus \underline{\Psi} : \mathcal{V} \oplus \underline{\mathbb{C}}^N \rightarrow \mathcal{W}.$$

Nach Konstruktion gilt $\text{Koker}(\mathcal{D}_A^+) = \text{Im}(\underline{\Psi})$, und man kann definieren

$$\text{ind}(\mathcal{D}, \underline{E}) := \left[\text{Ker} \left(\mathcal{D}_A^+ \oplus \underline{\Psi} \right) \right] - \left[\underline{\mathbb{C}}^N \right] \quad (7.2.5)$$

als ein Element der K-Theorie. Seien nun $\underline{\Psi}_1$ und $\underline{\Psi}_2$ zwei derartige Abbildungen aus Räumen $\underline{\mathbb{C}}^{N_1}$ bzw. $\underline{\mathbb{C}}^{N_2}$ nach \mathcal{W} . Dann sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_A^+ \oplus \underline{\Psi}_1 \oplus 0 &: \mathcal{V} \oplus \underline{\mathbb{C}}^{N_1+N_2} \rightarrow \mathcal{W} \\ \mathcal{D}_A^+ \oplus 0 \oplus \underline{\Psi}_2 &: \mathcal{V} \oplus \underline{\mathbb{C}}^{N_1+N_2} \rightarrow \mathcal{W} \end{aligned}$$

surjektiv und linear homotop zu $\mathcal{D}_A^+ \oplus \underline{\Psi}_1 \oplus \underline{\Psi}_2$. Die Kerne beider Abbildungen sind also als Vektorbündel isomorph, und es gilt

$$\left[\text{Ker} \left(\mathcal{D}_A^+ \oplus \underline{\Psi}_1 \right) \right] + \left[\underline{\mathbb{C}}^{N_2} \right] = \left[\text{Ker} \left(\mathcal{D}_A^+ \oplus \underline{\Psi}_2 \right) \right] + \left[\underline{\mathbb{C}}^{N_1} \right],$$

woraus folgt

$$\left[\text{Ker} \left(\mathcal{D}_A^+ \oplus \underline{\Psi}_1 \right) \right] - \left[\underline{\mathbb{C}}^{N_1} \right] = \left[\text{Ker} \left(\mathcal{D}_A^+ \oplus \underline{\Psi}_2 \right) \right] - \left[\underline{\mathbb{C}}^{N_2} \right].$$

(7.2.5) ist also unabhängig von der konkreten Wahl von $\underline{\Psi}$. Nun kann man die Definition der Chern-Klassen über die Whitney'sche Produktformel auf virtuelle Bündel ausdehnen. Es gilt

Theorem 7.1 [Atiyah-Singer]: *Der Chern-Charakter des Indexbündels einer Familie von Dirac-Operatoren $\mathcal{D}_A = \{\mathcal{D}_{A_\tau}\}_{\tau \in T}$ ist gegeben durch*

$$\text{ch}(\text{ind}(\mathcal{D}, \underline{E})) = (\text{ch}(\underline{E}) \hat{A}(X)) / [X].$$

Dabei ist der Chern-Charakter gegeben über

$$\text{ch}(\underline{E}) := \sum_{i=1}^r e^{x_i}$$

als Funktion der formalen Variablen x_1, \dots, x_r aus den Chernschen Klassen (r sei der Rang des Vektorbündels \underline{E})

$$c_i(\underline{E}) = \sigma_i(x_1, \dots, x_r) \in H^{2i}(T; \mathbb{Q}),$$

während das \hat{A} -Geschlecht definiert ist über

$$\hat{A} := \prod_1^n \left(\frac{y_i/2}{\sinh y_i/2} \right)$$

mit den formalen Variablen y_1, \dots, y_n zu den Pontrjagin-Klassen von X ,

$$p_k(X) = \sigma(y_1^2, \dots, y_n^2) \in H^{4k}(X; \mathbb{Q}).$$

Zum Beispiel gilt für zweidimensionale Flächen Σ bzw. 4-Mannigfaltigkeiten X^4

$$\hat{A}(\Sigma) = 1 \quad \text{bzw.} \quad \hat{A}(X^4) = 1 + \frac{1}{24} p_1(X),$$

und auf S^n verschwindet $p_1(S^n)$, also ist speziell $\hat{A}(S^n) = 1$.

7.3 Eine Beispielrechnung

In Kapitel 4.1 hatten wir gesehen, daß die Trivialität von $DET^{\mathcal{G}}$ im Gerbesinn durch eine 2-Form über \mathcal{A}_0 ausgedrückt wird, und zwar durch die Krümmung in IND . Die Chern-Klasse von IND wird aber bestimmt durch das Integral über eine $S^2 \subset \mathcal{A}_0$ von der Krümmung in IND . Hier wählen wir nun als S^2 in \mathcal{A}_0 eine Parametrisierung mit S^2 als Teilmenge von \mathcal{G} ($\Phi: S^2 \rightarrow \mathcal{G}$), die das Eins-Element enthält, und eine Familie von Zusammenhängen

$$A_{t,\tau} = f(t)A^{\Phi(\tau)} - (1-f(t))A_0. \quad (7.3.6)$$

Dabei sind A_0 und A gewählt wie in Kapitel 6.2 und der Parameter t beschreibt den Übergang zu einer geraddimensionalen Mannigfaltigkeit $M \times [0, 1]$, in Verbindung mit dem Spektralfluß. Mit Blick auf Theorem (7.2) hat man also die $n+2$ -te Chernklasse in G -Bündel \underline{P} über $M \times [0, 1] \times S^2$ zu betrachten. Letztere ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand, hier treten in der Indexformel noch Randterme auf, die sich aber als Funktion der Eigenwerte des Diracoperators auf dem Rand ausdrücken lassen. Auf dem Rand wirkt die Parametrisierung (7.3.6) aber gerade als Eichtransformation, so daß die Randterme konstant bleiben. Wir interessieren uns hier nur für den lokalen Anteil. Die Chernklasse von IND ist wie gesagt über das Integral über eine S^2 in \mathcal{A}_0 (dem Basisraum von IND) von der Krümmung gegeben. Führt man also nur die $M \times [0, 1]$ -Integration der $n+2$ -ten Chernklasse von \underline{P} aus, so erhält man die Krümmung unter Berücksichtigung des richtigen Normierungsfaktors $-2\pi i$

$$F_{IND}(X, Y) = -2\pi i \int_{M \times [0, 1]} c_{n+2}(\underline{F})(X, Y) = -2\pi i \int_{M \times \{1\}} CS_{2n+3}(\underline{F})(X, Y).$$

Der letzte Schritt entsteht durch Anwendung des Satzes von Stokes unter Beachtung, daß $A_{0,\tau} = A_0$ ist für alle τ , also das Integral verschwindet, wenn man X, Y einsetzt.

Für $\dim M=1$ ergibt sich somit

$$\begin{aligned} F_{IND}(X, Y) &= -2\pi i \int_{M \times [0,1]} \frac{1}{8\pi^2} \text{tr.}\{F^2\}(X, Y) \\ &= \frac{-i}{4\pi} \int_{M \times \{1\}} \text{tr.}\{A_{(x,\tau)} \wedge dA_{(x,\tau)} + \frac{2}{3}A_{(x,\tau)}^3\}(X, Y). \end{aligned}$$

Für die weitere Auswertung dieses Ausdrucks muß man erst einen Zusammenhang in den S^2 -Richtungen wählen. Auf $M \times \{1\} \times S^2$ beschreiben aber Tangentialvektoren in S^2 -Richtung gerade Umwicklungen des gewählten Zusammenhangs auf M . Wir setzen also

$$A_{(x,\tau)} := A_{(x)}^{\Phi(\tau)} + \Phi_{(x,\tau)}^{-1} d\tau \Phi_{(x,\tau)}.$$

Dabei ist $\Phi_{(x,\tau)}^{-1} d\tau \Phi_{(x,\tau)}$ die Maurer-Cartan-Form, die einem Tangentialvektor $\frac{\partial}{\partial \tau}$ das generierende *Lie* \mathcal{G} -Element zuordnet. Zunächst wollen wir typische Terme betrachten:

$$\begin{aligned} dA_{(x,\tau)} &= d_x \left(A_{(x)}^{\Phi(\tau)} + \Phi_{(x,\tau)}^{-1} d\tau \Phi_{(x,\tau)} \right) \\ &\quad + d_\tau \left(A_{(x)}^{\Phi(\tau)} + \Phi_{(x,\tau)}^{-1} d\tau \Phi_{(x,\tau)} \right) \\ &= d_x \left(A_{(x)}^{\Phi(\tau)} \right) + d_x \left(\Phi_{(x,\tau)}^{-1} d\tau \Phi_{(x,\tau)} \right) + d_\tau \left(\Phi_{(x,\tau)}^{-1} A_{(x)} \Phi_{(x,\tau)} \right) \\ &\quad + d_\tau \left(\Phi_{(x,\tau)}^{-1} d_x \Phi_{(x,\tau)} \right) + d_\tau \left(\Phi_{(x,\tau)}^{-1} d\tau \Phi_{(x,\tau)} \right) \\ &= d_x \left(A_{(x)}^{\Phi(\tau)} \right) - \Phi_{(x,\tau)}^{-1} d_x \Phi_{(x,\tau)} \wedge \Phi_{(x,\tau)}^{-1} d\tau \Phi_{(x,\tau)} \\ &\quad - \Phi_{(x,\tau)}^{-1} d\tau \Phi_{(x,\tau)} \wedge \Phi_{(x,\tau)}^{-1} A_{(x)} \Phi_{(x,\tau)} - \Phi_{(x,\tau)}^{-1} A_{(x)} \Phi_{(x,\tau)} \wedge \Phi_{(x,\tau)}^{-1} d_x \Phi_{(x,\tau)} \\ &\quad - \Phi_{(x,\tau)}^{-1} d\tau \Phi_{(x,\tau)} \wedge \Phi_{(x,\tau)}^{-1} d_x \Phi_{(x,\tau)} - \Phi_{(x,\tau)}^{-1} d\tau \Phi_{(x,\tau)} \wedge \Phi_{(x,\tau)}^{-1} d\tau \Phi_{(x,\tau)}. \end{aligned}$$

d_x bzw. d_τ bezeichnen hier das Differential für die M - bzw. S^2 -Koordinaten. Bei der Berechnung der Terme $A \wedge dA$ bzw. $\frac{2}{3}A^3$ werden jetzt nur noch die Beiträge aufgeführt, die 2 Einträge in S^2 -Richtung und einen in M -Richtung zulassen. Mit

anderen Worten, es werden nur Terme der Gestalt $A^{\Phi(\tau)} \wedge (\Phi^{-1} d_\tau \Phi)^2$ mitgeführt:

$$\begin{aligned} & tr. \{A_{(x,\tau)} \wedge dA_{(x,\tau)}\} \\ &= -tr. \left\{ 3A_{(x)}^{\Phi(\tau)} \wedge (\Phi_{(x,\tau)}^{-1} d_\tau \Phi_{(x,\tau)})^2 \right\} + \dots \\ & tr. \{A_{(x,\tau)}^3\} \\ &= tr. \left\{ \left(A_{(x)}^{\Phi(\tau)} + \Phi_{(x,\tau)}^{-1} d_\tau \Phi_{(x,\tau)} \right)^3 \right\} \\ &= tr. \left\{ 3A_{(x)}^{\Phi(\tau)} \wedge (\Phi_{(x,\tau)}^{-1} d_\tau \Phi_{(x,\tau)})^2 \right\} + \dots \end{aligned}$$

Es ergibt sich damit

$$\begin{aligned} & tr. \left\{ A_{(x,\tau)} \wedge dA_{(x,\tau)} + \frac{2}{3} A_{(x,\tau)}^3 \right\} \\ &= -tr. \left\{ A_{(x)}^{\Phi(\tau)} \wedge (\Phi_{(x,\tau)}^{-1} d_\tau \Phi_{(x,\tau)})^2 \right\} + \dots \end{aligned}$$

Setzt man nun zwei Vektorfelder X, Y in S^2 -Richtung ein, so ergibt das Keilprodukt der beiden Maurer-Cartan-Formen den Kommutator der Lie-Algebra $Lie\mathcal{G}$:

$$F_{IND}(X, Y) = \frac{i}{4\pi} \int_M tr. \{A(x)[X, Y]\}. \quad (7.3.7)$$

Dies ist Lie-Algebra-kohomolog zum zentralen Term der Kač-Moody-Algebra [9]

$$c(X, Y) = \frac{i}{2\pi} \int tr. \{X \partial_\tau Y\}, \quad (7.3.8)$$

und zwar unterscheiden sich beide um den Rand von

$$\Theta_A(X) = \frac{i}{4\pi} \int tr. \{AX\}.$$

Nach der Definition des Randoperators gilt:

$$(d\Theta_A)(X, Y) = X(\Theta_A(Y)) - Y(\Theta_A(X)) + \Theta_A([X, Y]).$$

Der letzte Term ist schon (7.3.7). Betrachten wir $X(\Theta_A(Y))$ genauer. Seien $\Phi_X(t)$ bzw. $\Phi_Y(t)$ die Flüsse zu X bzw. Y . Dann gilt:

$$\begin{aligned} X(\Theta_A(Y)) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\Theta_{A_{\Phi_X(t)}}(Y) \right) \\ &= \frac{i}{4\pi} \int_M tr. \left\{ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} A_{(x)}^{\Phi_X(t)}(Y) \right\} \\ &= \frac{i}{4\pi} \int_M tr. \left\{ (-XA_{(x)} + A_{(x)}X \right. \\ &\quad \left. - X d_x \Phi_{(x,\tau)} + d_x X) Y \right\}. \end{aligned}$$

Unter erneuter Ausnutzung der Zyklizität der Spur ergibt sich

$$X(\Theta_A(Y)) - Y(\Theta_A(X)) = \frac{i}{4\pi} \int_M \text{tr.} \{ (d_x X)Y - (d_x Y)X \}.$$

Mit dem Satz von Stokes folgt damit die gesuchte Differenz

$$X(\Theta_A(Y)) - Y(\Theta_A(X)) = -\frac{i}{2\pi} \int_M \text{tr.} \{ (d_x Y)X \}.$$

Für $\dim(M) = 3$ sei hier noch ein weiteres Ergebnis angeben. Die dazu benötigte Chern-Simons-Form $CS_5(A)$ lautet

$$CS_5(A) = \frac{i}{24\pi^3} \text{tr.} \{ A(dA)^2 + \frac{2}{3}A^3 dA + \frac{3}{5}A^5 \}.$$

Damit erhält man für die Krümmung

$$\begin{aligned} \omega_A(X, Y) = \frac{i}{4\pi^2} \int \text{tr.} \{ & (A dA + dAA + A^3)[X, Y] \\ & + X dA Y A - Y dA X A \}. \end{aligned}$$

Dies unterscheidet sich vom Faddeev-Mickelsson-Kozyklus [25, 17]

$$\omega'_A(X, Y) = \frac{i}{24\pi^2} \int \text{tr.} \{ A(dX dY - dY dX) \}$$

um den Korand von

$$\frac{-i}{24\pi^2} \int \text{tr.} \{ A dA + dAA + A^3 \} X \}.$$

Zum Vergleich dieser Formen mit den Resultaten von Araki [1] sei hier noch eine Formel aus einer Arbeit von Langmann [22] angeben:

$$i^d \text{tr.}_c \left\{ \Gamma^{(d)} \hat{X}_0 [\varepsilon, \hat{X}_1] \dots [\varepsilon, \hat{X}_1] \right\} = c_d \int_{\mathbb{R}^d} \text{tr.} \{ X_0 dX_1 \dots dX_d \}.$$

Dabei ist d die Dimension der Mannigfaltigkeit, $\Gamma^{(d)}$ eine Involution auf dem 1-Teilchen-Hilbertraum und ε das Vorzeichen des Diracoperators bezüglich Γ , $\Gamma \varepsilon = -\varepsilon \Gamma$. c_d ist eine dimensionsabhängige Konstante. Weiter bezeichnen hier \hat{X}_i Generatoren von Eichtransformationen, während X_i dieselben, aber aufgefaßt als fundamentales Vektorfeld, meint. tr._c ist die sogenannte 'conditional trace' [23, 24]

$$\text{tr.}_c \{ a \} = \frac{1}{2} \text{tr.} \{ a + \varepsilon a \varepsilon \}.$$

Obige Formel bietet auch einen Einstieg zur nichtkommutativen Geometrie [24], wenn man die rechte Seite, die ja die Mannigfaltigkeit enthält, wegläßt.

7.4 Eine universelle Konstruktion über $M \times \mathcal{A}/\mathcal{G}$

Man kann nun ein Bündel \mathbb{P} mit Zusammenhang \mathbb{A} über $M \times \mathcal{A}/\mathcal{G}$ konstruieren, das universell ist für G -Hauptfaserbündel $\underline{P} \rightarrow M \times T$ mit einer Familie von Zusammenhängen $\{A_\tau\}_{\tau \in T}$. Sei dazu ein G -Hauptfaserbündel $P \rightarrow M$ gegeben. \mathcal{G} wirkt frei auf $P \times \mathcal{A}$ durch

$$\mathcal{G} \in \Phi : (p, A) \rightarrow (\Phi(p), A^\Phi).$$

Dies gilt sogar für die volle Gruppe der Eichtransformationen, da die Bedingung $p = \Phi(p)$ ja bereits eine Punktierung darstellt. Man erhält damit ein \mathcal{G} -Hauptfaserbündel

$$(P \times \mathcal{A}, (P \times \mathcal{A})/\mathcal{G}, \mathcal{G}).$$

Im folgenden wollen wir die Abkürzung $\mathbb{P} := (P \times \mathcal{A})/\mathcal{G}$ verwenden. Die Gruppe G wirkt natürlich auf P . Sei die Wirkung von G auf \mathcal{A} definiert als die triviale Operation. Auf P vertauscht die G - mit der \mathcal{G} -Wirkung (sei dazu $g \in G$, $\Phi \in \mathcal{G}$ gewählt und $\Phi(p) = \Psi_{u(p)}p$ für eine äquivariante Abbildung $u : P \rightarrow G$ (siehe 1.5))

$$\Psi_g \Psi_{u(p)} p = \Psi_{g^{-1}u(p)g} \Psi_g p = \Psi_{u(\Psi_g p)} \Psi_g p.$$

Folglich ist die G -Wirkung auf Klassen in \mathbb{P} wohldefiniert:

$$G \ni g : [p, A] \ni (\Phi(p), A^\Phi) \mapsto (\Psi_g(\Phi(p)), A^\Phi) = (\Phi(\Psi_g p), A^\Phi) \in [\Psi_g p, A].$$

Es gilt allgemein:

$$\Phi : [p, A] \mapsto [p, A] \Leftrightarrow \exists \Phi : \Phi(\Psi_g p) = p, A^\Phi = A. \quad (7.4.9)$$

Die G -Wirkung ist demnach frei, wenn

- \mathcal{G} die punktierte Eichgruppe ist:

$$\Phi(\Psi_g p) = \Psi_g(\Phi(p)) = \Psi_g(p) = p \Rightarrow g = e$$

- \mathcal{A} der Raum der irreduziblen Zusammenhänge² ist und $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}/C(G)$:

$$A^\Phi = A \Rightarrow \Phi \in C(G) \Rightarrow \Phi = [e] \Rightarrow \Psi_g p = p \Rightarrow g = e.$$

²Betrachtet man die Wirkung der vollen Eichgruppe \mathcal{G} auf einer Faser P_{x_0} , so gilt offensichtlich

$$\mathcal{G}/\mathcal{G}_0 \cong \text{Aut}(P_{x_0}) \cong G. \quad (7.4.10)$$

Weiter ist das Zentrum $C(G)$ von G im Stabilisator $\Gamma(A)$ eines Zusammenhangs A enthalten. Dies sieht man wie folgt. Eine Eichtransformation ist durch eine äquivariante Abbildung $u : P \rightarrow G$ gegeben. Wir wollen nun eine Eichtransformation aus Γ_A definieren mit $u(p) = a \in G$. Dies soll mit

In beiden Fällen wird $(\mathbb{P}, \mathbb{P}/G, G)$ ein G -Hauptfaserbündel. Es existiert noch ein natürlicher Isomorphismus

$$\mathbb{P}/G \rightarrow M \times \mathcal{A}/\mathcal{G},$$

definiert über

$$[[p]_G, A]_{\mathcal{G}} \ni (\Phi(p), A^\Phi) \mapsto ([\Phi(p)]_G, [A^\Phi]_{\mathcal{G}}) = ([p]_G, [A]_{\mathcal{G}}) \in M \times \mathcal{A}/\mathcal{G}$$

Dabei meint $[\cdot]_G$ die Äquivalenzklasse bezüglich der G -Wirkung. Also hat man nun ein G -Hauptfaserbündel

$$(\mathbb{P}, M \times \mathcal{A}/\mathcal{G}, G).$$

Jetzt soll in \mathbb{P} ein Zusammenhang A konstruiert werden. Dies geschieht über eine Metrik auf \mathbb{P} . Dazu betrachten wir erst einmal Metriken auf \mathcal{A} und P :

Hat man in P einen Zusammenhang A gewählt, so ergibt sich eine G -invariante Metrik durch die Metrik auf der Basismannigfaltigkeit und die Killingform auf $\mathfrak{G} = \text{Lie}G$:

$$\xi, \eta \in T_p P : \langle \xi, \eta \rangle_P := \langle \pi_* \xi, \pi_* \eta \rangle_M + \text{tr.} \{A_{(p)}(\xi)A_{(p)}(\eta)\}.$$

Auf \mathcal{A} ist die Metrik gegeben durch die Standardmetrik für L_2 -Funktionen (Da \mathcal{A} sich als affiner Vektorraum auffassen läßt, ist jedes Element aus $T\mathcal{A}$ eine 1-Form über M , die sich unter \mathcal{G} tensoriell transformiert):

$$a, b \in T_A \mathcal{A} : \langle a, b \rangle_{\mathcal{A}} := \int_M \text{tr.} \{a \wedge *b\}.$$

Hilfe von horizontalen Kurven in P geschehen. Sei $\gamma : I \rightarrow P$ ein bezüglich A horizontaler Weg mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = \psi_g p$ für ein $g \in H_A$, der Holonomiegruppe von P_{x_0} . Nun kann man u definieren über

$$u(\gamma(t)) = a \quad \forall t, \forall \text{ hor. Kurven in } P \text{ mit } \gamma(0) = p$$

und die Äquivarianzeigenschaft. Dies ist natürlich nur wohldefiniert, wenn gilt

$$g^{-1} a g = a \quad \forall g \in H_A,$$

also ist

$$\Gamma_A \cong Z(H_A) \supset C(G).$$

Dabei bezeichnet $Z(H_A)$ den Zentralisator von H_A in G , das sind alle Elemente in G , die mit allen Elementen in H_A vertauschen. Man definiert nun die irreduziblen Zusammenhänge als diejenigen, für die $\Gamma_A \cong C(G)$. Gleichzeitig faktorisiert man nun die volle Gruppe der Eichtransformationen nach dem Zentrum von G (über die Beziehung (7.4.10)).

Diese Metrik ist aufgrund der Spurbildung wieder \mathcal{G} -invariant (Rechnung siehe Kapitel 7). Jede „Scheibe“ $\mathbb{P}|_{M \times [A]}$ ist isomorph P . Wählt man also im Totalraum $P \times \mathcal{A}$ in $P \times \{A\}$ den Zusammenhang A , so ergibt sich damit eine Metrik auf $P \times \mathcal{A}$, die durch die \mathcal{G} -Invarianz zu einer Metrik auf \mathbb{P} wird. Mit dieser Metrik kann man nun in \mathbb{P} eine horizontale Richtung auszeichnen.

Hat man nun eine Mannigfaltigkeit $M \times T$ mit T kompakt, so erhält man in einem G -Bündel $\underline{P} \rightarrow M \times T$ mit $P_\tau := P|_{M \times \{\tau\}} \cong P$ eine Familie von Zusammenhängen A_τ als pullback des Zusammenhangs in \mathbb{P} unter einer Abbildung $T \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$. Mit anderen Worten entsteht in \underline{P} eine Familie von Zusammenhängen, die flach sind in T -Richtung. Man findet folgendes Lemma [15]

Lemma 7.2: *Die Abbildungen $f : T \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$ sind in 1-1-Korrespondenz mit gerahmten Familien von Zusammenhängen auf M , parametrisiert durch T , und diese Korrespondenz erhält man durch pullback der universellen gerahmten Familie \mathbb{P} .*

Dabei bedeutet Rahmung die Bildung von Paaren (A, ϕ) , wo A ein Zusammenhang und $\phi : P|_{x_0} \rightarrow G$ eine Trivialisierung einer fixierten Faser sind. \mathcal{G} wirkt dann auf der A -Komponente und auf ϕ , so daß die Faktorisierung der gerahmten Zusammenhänge nach der vollen Eichgruppe der Faktorisierung von \mathcal{A} nach der punktierten Eichgruppe entspricht. Wählt man nämlich eine Abbildung $\phi : \pi^{-1}(x_0) \rightarrow G$, so bleibt diese unter der Wirkung der punktierten Gruppe erhalten. Man kann somit für ganz \underline{P} eine beliebige Rahmung fixieren. Bezüglich dieser erhält man somit eine Abbildung $A_t \mapsto [A_t, \phi] \mapsto [A_t]$, wie im Lemma gefordert.

Nach Kapitel 7 ist der Zusammenhang A in \mathbb{P} wie folgt gegeben. Der Tangentialraum an einen Punkt $(p, [A])$ zerfällt in die direkte Summe einer P -Komponente und eine \mathcal{A}/\mathcal{G} -Richtung. Sei $x \in M$, $[A] \in \mathcal{A}/\mathcal{G}$, $\xi, \eta \in T_x M$, $a, b \in T_A(\mathcal{A}/\mathcal{G})$. Es ist

- $\mathbb{A}_{(x, [A])}(\xi) = \xi_\mu A^\mu(x)$ und
- $\mathbb{A}_{(x, [A])}(a) = (G_A d_A^* a)_{(x)}$,

siehe Kapitel 7. Die Krümmung ist gegeben durch [15]

- $\mathbb{F}_{(A, \lambda)}(\xi, \eta) = F_A(\xi, \eta)$
- $\mathbb{F}_{(A, \lambda)}(a, \eta) = \langle a, \xi \rangle$
- $\mathbb{F}_{(A, \lambda)}(a, b) = -2G_A\{a, b\}_{(x)}$.

Es sei hier noch erwähnt, daß eine lokale Einbettung von \mathcal{A}/\mathcal{G} in \mathcal{A} existiert, siehe z.B [15]. Diese ist gegeben durch die Hintergrundeichung

$$d_a^* a = 0$$

für $a \in T_A \mathcal{A}$. Jeder Tangentialvektor an $T_{[A]} \mathcal{A}/\mathcal{G}$ hat also einen lokal eindeutigen Repräsentanten in $T_A \mathcal{A}$. Auf diese Weise entstehen die \mathcal{A}/\mathcal{G} -Komponenten von \mathbb{A} bzw. \mathbb{F} , wenn man den durch die Metrik gegebenen Zusammenhang auf $M \times \mathcal{A}$ nimmt und Tangentialvektoren an \mathcal{A}/\mathcal{G} in der Hintergrundeichung einsetzt. Nun definiert man eine 3-Form Ω_X auf \mathcal{A}/\mathcal{G} durch

$$\Omega_X(b, b', b'') = \int_M c_{n+2}(\mathbb{F}), \quad (7.4.11)$$

wo $2n+1$ die Dimension von M ist und b, b', b'' in der Hintergrundeichung liegen. Zum Schluß des Kapitels wollen wir sehen, daß Ω_X die Dixmier-Douady-Klasse des Gerbes DET repräsentiert, d.h. in der gleichen deRham-Kohomologiekategorie liegt wie die Dixmier-Douady-Form.

Dazu berechnen wir zunächst das Integral von Ω_X über eine S^3 in \mathcal{A}/\mathcal{G} . Dies läßt sich schreiben als Integral über eine D^3 in \mathcal{A} , bei der der Rand durch Eichtransformationen verbunden ist. Nach der Konstruktion entstand ja \mathbb{F} unter der Faktorisierung aus der Krümmung in $M \times \mathcal{A}$. Mit dem Stokesschen Satz folgt

$$\int_{S^3} \Omega_X = \int_{M \times S^3} c_{n+2}(\mathbb{F}) = \int_{M \times D^3} c_{n+2}(\mathbb{F}) = \int_{M \times \partial D^3} CS_{2n+3}(\mathbb{A}). \quad (7.4.12)$$

Das letzte Integral trat schon in Kapitel 7.3 auf. Dort hatten wir das Integral über die $n+2$ -te Chernklasse des Bündels $\underline{P} \cong P \times D^3$ berechnet. Man kann nämlich die dort verwendete $[0, 1]$ - und S^2 -Parametrisierung zusammenfassen zu einer Parametrisierung mit D^3 , da bei $t=0$ die S^2 -Parametrisierung den Zusammenhang $A_{0,\tau} = A_0$ unverändert läßt (Es wird die „innere Schale“ von $[0, 1] \times S^2$ identifiziert). Der Rand dieser Scheibe ist durch Eichtransformationen verbunden, da nach (7.3.6) bei $t=1$ gilt $A_{(1,\tau)} = A^{\Phi(\tau)}$. Damit erhält man \underline{P} als pullback der Parametrisierung

$$D^3 \ni (t, \tau) \mapsto A_{(t,\tau)},$$

und die rechte Seite von (7.4.12) ist gleich dem Integral

$$\int_{M \times \{1\} \times S^2} CS_{2n+3}(\underline{A}).$$

Nun wollen wir das Integral der Dixmier-Douady-Form ω aus Kapitel 5.2 über eine S^3 in \mathcal{A}/\mathcal{G} berechnen. ω entstand aus der Gerbekrümmung F_{∇} über

$$\pi^* \omega = df \quad , \quad F_{\nabla} = \delta f,$$

wobei π hier die Projektion $\mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{A}$ (bzw. analog für $\mathcal{A}_0/\mathcal{G}$) ist. Das Urbild einer S^3 in \mathcal{A}_0 unter der Projektion nach der Eichwirkung $p : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_0$ ist aber eine D^3 mit über Eichtransformationen identifiziertem Rand. Man berechnet wieder

$$\begin{aligned} \int_{S^3 \subset \mathcal{A}/\mathcal{G}} \omega &= \int_{S^3 \subset \mathcal{A}_0/\mathcal{G}} df \\ &= \int_{D^3 \subset \mathcal{A}_0} p^* df = \int_{\partial D^3} p^* f. \end{aligned}$$

(Man beachte, daß das Spektrum von \mathbb{D}_A eichinvariant ist und deshalb ∂D^3 in einer Zusammenhangskomponente von \mathcal{A}_0 liegt.) Weiter ist f gleich der 1. Chernklasse von IND , da

$$DET = IND^* \otimes IND$$

und folglich

$$c_1(DET)_{(A,\lambda,\mu)} = c_1(IND)_{(A,\lambda)} - c_1(IND)_{(A,\mu)},$$

aber andererseits

$$F_{\nabla} = \delta f = \pi_1^* f - \pi_2^* f$$

gilt. $c_1(IND)$ steht aber auf der linken Seite von (7.2). Damit ist die rechte Seite der letzten Gleichung über das Indextheorem (7.2) gleich der rechten Seite von (7.4.12). Es ergibt sich abschließend

$$\begin{aligned} \int_{S^3} \Omega_X &= \int_{M \times \partial D^3} CS_{2n+3}(\underline{A}) \\ &= \int_{M \times \{1\} \times S^2} CS_{2n+3}(\underline{A}) \\ &= \int_{\partial D^3} p^* f &= \int_{S^3 \subset \mathcal{A}/\mathcal{G}} \omega. \end{aligned}$$

Also stimmen die deRham-Klassen von Ω_X und ω überein.

Anhang A

Bemerkungen zu \otimes und \ast

Bezeichnet $P \rightarrow Y$ ein \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel, so ist dazu ein eindimensionales Lini-
enbündel $L \rightarrow Y$ assoziiert. Sei dazu V ein Vektorraum, auf dem die Strukturgruppe
von P operiert. Sei $L := P \times_{\mathbb{C}_*} V = (P \times V) / \sim$. Man klebt also an jeden Punkt des
zugrundeliegenden Raumes den Darstellungsraum V von \mathbb{C}_* . Die Äquivalenzre-
lation \sim bedeutet $(p, v) \sim (pz, v * z^{-1})$, $z \in \mathbb{C}_*$. $*$ ist hierbei die Gruppenwirkung
auf V . Die typische Faser ist von der Gestalt

$$\mathbb{C}_* \times_{\mathbb{C}_*} V = (\mathbb{C}_* \times V) / \sim = V.$$

Das letzte Gleichheitszeichen ergibt sich aus folgender Überlegung:

Sei $g \in \mathbb{C}_*$ fixiert. Definiere $f : V \ni v \mapsto (g, v) \mapsto [g, v] \in (\mathbb{C}_* \times V) / \sim$.

f ist injektiv: Sei $[g, v] = f(v) = f(\hat{v}) = [g, \hat{v}]$. Wenn (g, v) und (g, \hat{v}) dersel-
ben Äquivalenzklasse angehören sollen, so muß gelten $g = gz$, $v = \hat{v} * z^{-1}$ für ein
 $z \in \mathbb{C}_*$. Aus der ersten Gleichung folgt aber $z = 1$.

f ist surjektiv: Wähle ein $[\hat{g}, \hat{v}]$ aus $(\mathbb{C}_* \times V) / \sim$. Zu der gewählten Klasse läßt
sich (durch Multiplikation mit $\hat{g}^{-1}g$) ein Repräsentant $(\hat{g}\hat{g}^{-1}g, \hat{v} * (\hat{g}^{-1}g)^{-1})$ ange-
ben. Offensichtlich ist $f(\hat{v} * (\hat{g}^{-1}g)^{-1}) = [\hat{g}, \hat{v}]$.

Man erhält also auf diese Weise das Vektorbündel L , auf dem \mathbb{C}_* operiert.

Nun zum Produkt \otimes zweier \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel. Es wird im folgenden ge-
zeigt werden, daß dieses Produkt auf dem Niveau der assoziierten Linienbündel
dem Tensorprodukt entspricht.

Laut Konstruktion erhielt man $P \otimes P$, was wieder ein \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel sein
sollte, aus $P \times P$ und anschließender Faktorisierung nach der antidiagonalen \mathbb{C}_* -
Wirkung. Sei nun V der natürliche \mathbb{C}_* -Darstellungsraum, dann ist $V \times V$ der Dar-
stellungsraum von $\mathbb{C}_* \times \mathbb{C}_*$. Auf $V \times V$ läßt sich aber durch $(a, b) + (c, d) = (a +$
 $c, b + d)$, $\lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$ eine Addition erklären. Hierbei sind a, b, c, d Ele-
mente aus V und $\lambda \in \mathbb{R}$. Als nächstes wenden wir uns der Gruppenwirkung auf $V \times$
 V zu. Die Faktorisierung nach der Antidiagonalen bedeutet, daß das Eins-Element

nun von der Form (z, z^{-1}) ist, und nicht mehr $(1, 1)$, wie im Fall der $\mathbb{C}_* \times \mathbb{C}_*$ -Wirkung. Dies erzeugt auf $V \times V$ die Äquivalenz

$$(a, b) \sim (a * z, b * z^{-1}). \quad (\text{A.0.1})$$

Weiterhin ist $(a, 0) \sim (0, b)$ wegen $(a, 0) * (g, h) = (a * g, 0) = (a * z * g, 0 * z^{-1}) = z(a * g, 0)$, wobei $a, b \in V, g, h, z \in \mathbb{C}_*$. Die erste Gleichheit folgt aus der Quotientenbildung und der Tatsache, das \mathbb{C}_* abelsch ist, während dem zweiten Schritt die Definition der Addition zugrundeliegt. Man kann nun einen Isomorphismus

$$V \times V \ni (v, w) \mapsto v \otimes w \in V \otimes V$$

konstruieren, der aber nicht linear ist. Andererseits kann man sich ja die Faktorisierung (A.0.1) auch so vorstellen, daß man als Repräsentanten einer Klasse $[v, w]$ immer ein Paar (\tilde{v}, u) mit vorher fixiertem \tilde{v} wählt (Man beachte, daß \mathbb{C}_* einfach transitiv auf V wirkt). Auf diese Weise sieht man leicht ein, daß

$$V \times V / \mathbb{C}_* \cong V.$$

Es wird dabei auf der linken Seite nach der Äquivalenzrelation A.0.1 faktorisiert. Über den gerade erwähnten Isomorphismus zwischen $(V \times V) / \mathbb{C}_*$ und V erhält man auch eine lineare Struktur:

$(a, b) + (c, d) = (a, b) + (a, d * z) = (a, b + d * z)$. Es soll hier $z \in \mathbb{C}_*$ so gewählt werden, daß $c = a * z$. Insbesondere gilt also $(a, b) + (a, c) = (a, b + c)$, im Unterschied zur oben eingeführten Addition auf $V \times V$. Definiert man schließlich

$$f: V \times V / \mathbb{C}_* \ni [v, w] \mapsto v \otimes w \in V \otimes V$$

für ein vorher fixiertes v (siehe die Bemerkung über die Auswahl eines Repräsentanten), so läßt sich leicht zeigen, daß f Isomorphismus ist. f ist aber außerdem noch linear:

$$\begin{aligned} f((a, b) + (c, d)) &= f((a, b) + (a, d * z)) = f((a, b + d * z)) \\ &= a \otimes (b + d * z) = a \otimes b + a \otimes d * z \\ &= a \otimes b + c \otimes d. \end{aligned}$$

Damit kann man also auch $V \otimes V$ als Darstellungsraum zu $\mathbb{C}_* \otimes \mathbb{C}_*$ auffassen. Mit der am Anfang beschriebenen Konstruktion dehnt sich dies auch auf die entsprechenden Bündel aus. Das Gerbeprodukt \circledast stellt eine konkrete Wahl eines \mathbb{C}_* -Isomorphismus $P \circ P \cong P$ dar.

Zum Abschluß dieses Kapitels noch die fehlende Berechnung der zu einer Gerbe-Faser inversen Faser. Sei wieder (P, Y, X, \circledast) das Gerbe. Die folgende Rechnung hängt nicht vom Basisraum des \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündels ab und gilt deshalb für

Gerbes und \mathbb{C}_* -Gruppoiden gleichermaßen. Wir suchen also die inverse (bezüglich der Gruppoidoperation \otimes) Faser zu $P_{(x,y)}$. Aus der Fußpunktseigenschaft ergibt linebreak[4] sich, daß diese über (y, x) liegen muß. Sei nun $p \in P_{(x,y)}$, $q \in P_{(y,x)}$ mit $p \otimes q = e_x \tilde{c}(q)$. Man sieht gleich, daß das zu p Inverse $(q \tilde{c}^{-1})$ ist. Sei weiterhin $q \otimes p = e_y c(p)$. Das inverse Element zu q ist somit $p c(p)^{-1}$. Es gilt aber

$$p \otimes q \otimes p = p \otimes (q \otimes p) = p \otimes e_y c(p) = p c(p),$$

und andererseits

$$p \otimes q \otimes p = (p \otimes q) \otimes p = e_x \tilde{c}(q) \otimes p = p c(q).$$

Vergleicht man nun beide Zeilen, so sieht man $c(p) = \tilde{c}(q)$. Dies ist aber gleichbedeutend mit

$$p \otimes p^{-1} = e_x \iff e_y = p^{-1} \otimes p.$$

Aus der expliziten Konstruktion ergibt sich außerdem, daß die zu $P_{(x,y)}$ inverse Faser isomorph $P_{(y,x)}$ ist, nur daß hier \mathbb{C}_* durch Multiplikation mit dem Reziproken wirkt. Man schreibt für die inverse Faser dann $P_{(x,y)}^*$. Es gilt noch

$$P_{(x,y)} \otimes P_{(z,y)}^* \cong P_{(x,y)} \otimes P_{(y,z)}.$$

Dazu beobachtet man, daß P über Punkten (y, y) aus $Y^{[2]}$ trivial ist. Folglich kann man das Ergebnis der Multiplikation irgendzweier Elemente aus $P_{(x,y)}$ und $P_{(x,y)}^*$ als komplexe Zahl auffassen, die Elemente der inversen Faser sind gleichzeitig duale Elemente. Weiter verschafft man sich einen Isomorphismus

$$P_{(x,y)} \ni p \mapsto q \left((p \otimes q) e_x^{-1} \right)^{-1} \in P_{(x,y)}^{-1}.$$

Dabei ordnet der Term in der äußeren Klammer jedem Paar aus $P_{(x,y)} \times P_{(x,y)}^*$ eine komplexe Zahl aus \mathbb{C}_* zu. Für ein anderes Element aus $P_{(x,y)}$ errechnet man

$$pz \mapsto q \left((pz \otimes q) e_x^{-1} \right)^{-1} = qz^{-1} \left((p \otimes q) e_x^{-1} \right)^{-1}.$$

Wie erwähnt wirkt \mathbb{C}_* durch Multiplikation mit dem Reziproken ($z \in \mathbb{C}_*$). Es bleibt noch, die Konsistenz der Faktorisierung unter dieser Identifizierung zu prüfen:

$$(p, \tilde{q}) \sim (p * z, \tilde{q} * z^{-1}) = (pz, \tilde{q}z) \cong (pz, qz^{-1}) \sim (p, q).$$

Anhang B

Čech-Kohomologie

Dieses Kapitel folgt [12].

Sei $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ eine lokal endliche Überdeckung eines zusammenhängenden topologischen Raumes X , $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = X$.

Definition 2.1: Das geordnete Tupel $(\alpha_0, \dots, \alpha_q)$ heißt q -Simplex der Überdeckung \mathcal{U} , falls $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_q} \neq \emptyset$. Der Kürze halber bezeichne $S = (\alpha_0, \dots, \alpha_q)$, $|S| = q$, $U_S = U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_q} \neq \emptyset$. Weiterhin sei $N(\mathcal{U})$ der simpliziale Komplex, gebildet aus allen q -Simplices der Überdeckung \mathcal{U} , der sogenannte Nerv von \mathcal{U} .

Außerdem sei \mathcal{G} eine Garbe abelscher Gruppen über X und $\Gamma(U, \mathcal{G})$ sei die assoziierte Prägarbe der Schnitte über U . (Zur Garbentheorie siehe z.B. [8].)

Gehen wir nun zur Definition des Korand-Operators δ über, um Kohomologie betreiben zu können. Unter einer q -Kokette wollen wir eine Abbildung

$$(\alpha_0, \dots, \alpha_q) \mapsto f(\alpha_0, \dots, \alpha_q) \in \Gamma(U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_q}, \mathcal{G})$$

verstehen. f soll dabei schiefssymmetrisch bezüglich Vertauschungen zweier Argumente in $(\alpha_0, \dots, \alpha_q)$ sein. f ist also eine Funktion auf q -fachen Durchschnitten offener Mengen in X mit Werten in \mathcal{G} . Bezeichnet noch $\mathcal{C}^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{G})$ die Menge der q -Koketten des Nervs von \mathcal{U} (per Definition soll $\mathcal{C}^q = 0$ gelten für $q < 0$), so ist man gerüstet für

Definition 2.2: Sei $f \in \mathcal{C}^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{G})$. Dann ist

$$(\delta_q f)(\alpha_0, \dots, \alpha_{q+1}) := \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^i f(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{q+1}).$$

Dabei wurden die relevanten Einschränkungsabbildungen, die aus f eine $(q+1)$ -Kokette machen, weggelassen. $\hat{\alpha}_i$ deutet die Auslassung des betreffenden Elements an.

Wie man sich leicht überzeugen kann, gilt

Lemma 2.3: $\delta_{q+1} \delta_q = 0$.

Wichtig dafür ist, daß \mathcal{G} Garbe abelscher Gruppen ist. Es entsteht daraus eine Sequenz

$$\dots \rightarrow \mathcal{C}^q \xrightarrow{\delta_q} \mathcal{C}^{q+1} \rightarrow \dots,$$

die allerdings im allgemeinen nicht exakt ist. Dies führt zur Kohomologie

$$H^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{G}).$$

Diese hängt aber noch von der gewählten Überdeckung ab. Man kann nun zu feineren Überdeckungen (d.h. \mathcal{U} einbeschrieben) übergehen und eine Äquivalenzrelation einführen, die zwei q -Koketten zu verschiedenen Überdeckungen auf einer Umgebung vergleicht, die in beiden Definitionsbereichen enthalten ist. Man zeigt, daß diese Einschränkung mit dem Randoperator vertauscht und kann dann den sogenannten direkten Limes der Čech-Kohomologie der Überdeckungen bilden, $\check{H}^r(X, \mathcal{G}) = \lim H^r(N(\mathcal{U}), \mathcal{G})$. Es gilt

Theorem 2.4 [Leray]: $H^r(N(\mathcal{U}), \mathcal{G}) = \check{H}^r(X, \mathcal{G}) \forall r > 0$, wenn es eine Überdeckung \mathcal{U} gibt, so daß für alle $k > 0$ und alle Durchschnitte $U_\alpha = U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_k}$ gilt $\check{H}^k(U_\alpha, \mathcal{G}) = 0$.

Hier ohne Beweis. Als Anwendung wird gezeigt:

Satz 2.5: $\check{H}^r(X, \mathbb{R}) = 0$ für $r > 0$.

Beweis. Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\{e_\alpha\}$ eine $\{U_\alpha\}$ subordinierte Zerlegung der Eins. Sei weiter f ein r -Kozyklus $(\beta, \alpha) \mapsto f(\beta, \alpha)$. (Dabei ist $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1})$ ein Multiindex.)

Setze $f'(\beta, \alpha) := \begin{cases} e_\beta f(\beta, \alpha) & \text{in } U_\beta \cap U_\alpha \\ 0 & \text{in } U_\alpha \setminus U_\beta \end{cases}$ und $f''(\alpha) = \sum_\beta f'(\beta, \alpha)$. Beachte, daß f'' eine $(r-1)$ -Kokette definiert.

Lemma 2.6: Es gilt $\delta f'' = f$.

Durch Nachrechnen ergibt sich

$$\begin{aligned} (\delta f'')(\alpha, \alpha_r) &= \sum_{\nu=0}^r (-1)^\nu f''(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_\nu, \dots, \alpha_r) \\ &= \sum_\beta e_\beta \sum_{\nu=0}^r (-1)^\nu f(\beta, \alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_\nu, \dots, \alpha_r) = (*). \end{aligned}$$

Nun ist aber f ein Kozyklus, d.h

$$(\delta f)(\beta, \alpha) = f(\alpha_0, \dots, \alpha_r) - \sum_{v=0}^r (-1)^v f(\beta, \alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_v, \dots, \alpha_r) = 0.$$

Setzt man dies oben ein, erhält man sofort

$$\begin{aligned} (*) &= \sum_{\beta} e_{\beta} (-1)^v f(\alpha_0, \dots, \alpha_r) \\ &= f(\alpha_0, \dots, \alpha_r) = (\delta f'')(\alpha_0, \dots, \alpha_r). \end{aligned}$$

Damit ist $\check{H}^r(X, \mathbb{R})$ nach Theorem 2.4 trivial für $r > 0$. □

Ein entsprechender Schluß gilt auch für $\check{H}^r(X, \mathbb{C})$, überhaupt für alle Garben \mathcal{G} mit einer Zerlegung der Eins $\{\eta_{\alpha}\}$, subordiniert zu $\{U_{\alpha}\}$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

Jedes η_{α} ist ein Garbenhomomorphismus $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ mit

- 1) η_{α} ist ein Nullhomomorphismus auf einer offenen Umgebung in $X \setminus U_{\alpha}$,
- 2) $\sum \eta_{\alpha} = 1$, d.h. gleich der identischen Abbildung der Garbe in sich.

Solche Garben heißen *feine Garben*.

Anhang C

Erweiterungen

C.1 Gruppenerweiterungen

Seien \hat{G} , G und K Gruppen.

Definition 3.1 [Gruppenerweiterung]: \hat{G} ist eine Erweiterung von G durch K , wenn Gruppen-Homomorphismen ι, π existieren, so daß

$$1 \rightarrow K \xrightarrow{\iota} \hat{G} \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1$$

eine exakte Sequenz und $\iota(K)$ Normalteiler von \hat{G} ist.

Definition 3.2 [Äquivalenz von Erweiterungen]:

Zwei Erweiterungen \hat{G}_1, \hat{G}_2 heißen äquivalent, falls ein Isomorphismus $\hat{f} : \hat{G}_1 \rightarrow \hat{G}_2$ mit folgendem kommutativen Diagramm existiert:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \hat{G}_1 & & & \\
 & & \iota_1 \nearrow & \downarrow \hat{f} & \searrow \pi_2 & & \\
 1 & \longrightarrow & K & & & G & \longrightarrow 1 \\
 & & \searrow \iota_2 & & \nearrow \pi_1 & & \\
 & & & \hat{G}_2 & & &
 \end{array}$$

Es gilt [3]

Theorem 3.3 [Hochschild]: Sei K eine zusammenhängende, endlichdimensionale Liegruppe, G eine einfach zusammenhängende Liegruppe und \hat{G} eine Erweiterung von G durch K . Dann gibt es eine analytische Abbildung $s: G \rightarrow \hat{G}$ mit $\pi \circ s = \mathbb{1}_G$.

Man beachte, daß s im allgemeinen kein Homomorphismus ist. Letzteres ist nur für triviale Gruppenerweiterungen ($\hat{G} \cong G \times K$) der Fall.

Sei $s: G \rightarrow \hat{G}$ eine Abbildung aus obigem Theorem. Es gilt

$$\pi(s(g'')) = \pi(s(g')s(g)) \text{ für } g, g', g'' \in G, g'' = g'g.$$

Also ist

$$s(g')s(g) = \omega(g', g)s(g'g), \text{ wobei } \omega(g', g): G \times G \rightarrow \iota(K) \cong K.$$

Im folgenden wird die Einbettungsabbildung ι weggelassen.

Man wählt für s üblicherweise die Normierung $s(e_G) = e_{\hat{G}}$. Beide Eins-Elemente werden von nun an mit e bezeichnet.

Es ergibt sich damit aus

$$\begin{aligned} s(g) &= s(g)s(e) = \omega(g, e)s(ge) = \omega(g, e)s(g) \\ &= s(e)s(g) = \omega(e, g)s(eg) = \omega(e, g)s(g) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \omega(g, e) = \omega(e, g) = e,$$

und aus der Assoziativität der Gruppenmultiplikation folgt sofort

$$\omega(g'', g')\omega(g''g', g) = ([s(g'')])\omega(g', g)\omega(g'', g'g). \quad (\text{C.1.1})$$

Dabei ist $[s(g)]$ der durch $s(g)$ induzierte innere Automorphismus auf \hat{G} . Liegt K im Zentrum $C(\hat{G})$ von \hat{G} , so gilt $[s(g)]k = k \forall g \in G, k \in K$. Man spricht dann von zentralen Erweiterungen.

Gleichung (C.1.1) läßt sich auch kohomologisch deuten:

$\omega^n: \underbrace{G \times \cdots \times G}_{n\text{mal}} \rightarrow K$ ist eine Kokette. Der Korandoperator ist definiert als

$$\begin{aligned} (\delta \omega^n)(g_1, \dots, g_{n+1}) &= [s(g_1)]\omega^n(g_2, \dots, g_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (-1)^i \omega^n(g_1, \dots, \hat{g}_i, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1} \omega^n(g_1, \dots, g_n). \end{aligned}$$

Wie man sich leicht überzeugt (unter Beachtung, daß K abelsch ist), gilt $\delta \circ \delta = 0$. Die zugehörige Kohomologie wird mit $H_G^*(K)$ bezeichnet. (C.1.1) ist nun äquivalent zu $(\delta \omega)(g'', g', g) = 0$, also ein Element aus $H_G^2(K)$.

Definition 3.4: Sei $s: G \rightarrow \hat{G}$ mit $\pi \circ s = \mathbb{1}_G$. $\omega: G \times G \rightarrow K$ heißt Faktor-system, wenn $\omega(e, g) = \omega(g, e) = e$ und $\delta \omega = 0$ ist.

Wählt man nun einen anderen Schnitt s' , so unterscheiden sich beide um eine Abbildung $\gamma: G \rightarrow K$, wobei $s'(g) = \gamma(g)s(g)$, also $\gamma(e) = e$. Man erhält für die Faktorsysteme

$$\begin{aligned}\omega'(g',g) &= ([s(g')] \gamma(g)) (\gamma(g'g)^{-1}) \gamma(g') \omega(g',g) \\ &= (\delta\gamma)(g',g) \omega(g',g).\end{aligned}$$

Zwei Faktorsysteme unterscheiden sich demnach nur um eine Korand in $H_G^2(K)$. Seien nun \hat{G}_1, \hat{G}_2 äquivalente Erweiterungen mit Abbildungen $s_{1/2}: G \rightarrow \hat{G}_{1/2}$ und Faktorsystemen $\omega_{1/2}$. Aus der Forderung, daß \hat{f} Isomorphismus ist, berechnet man

$$\begin{aligned}\pi_2 \circ \hat{f} \circ s_1 &= \pi_1 \circ s_1 = id_G \\ \pi_2 \circ s_2 &= id_G \\ \Rightarrow \hat{f} \circ s_1 &= \gamma \circ s_2,\end{aligned}$$

wobei $\gamma: G \rightarrow \hat{G}_2$. Aus

$$\gamma(e_G) \cdot e_{\hat{G}_2} = \gamma \circ \hat{f} \circ s_1 = s_2(e_G) = e_{\hat{G}_2}$$

folgt

$$\gamma(e_G) = e_{\hat{G}_2}.$$

Man sieht, daß $\hat{f} \circ \omega_1$ Faktorsystem zum Schnitt $\hat{f} \circ s_2$ ist, und nach der obigen Ausführung unterscheiden sich $\hat{f} \circ \omega_1$ und ω_2 um einen Korand $\delta\gamma$.

Zusammenfassend lassen sich also Erweiterungen $1 \rightarrow K \rightarrow \hat{G} \rightarrow G \rightarrow 1$ durch ein Element aus $H_G^2(K)$ beschreiben.

In dieser Arbeit ist K die Gruppe $\mathcal{M}ap(\mathcal{A}, \mathbb{C}_*)$. Für diesen Fall existiert eine exakte Sequenz

$$1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{M}ap(\mathcal{A}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}ap(\mathcal{A}, \mathbb{T}^1) \rightarrow 1.$$

Diese induziert eine lange exakte Sequenz

$$\begin{aligned}\dots \rightarrow H_G^2(\mathcal{M}ap(\mathcal{A}, \mathbb{R})) \rightarrow H_G^2(\mathcal{M}ap(\mathcal{A}, \mathbb{T})) \rightarrow H_G^3(\mathbb{Z}) \rightarrow \\ \rightarrow H_G^3(\mathcal{M}ap(\mathcal{A}, \mathbb{R})) \rightarrow \dots\end{aligned}$$

Andererseits gilt $H_G^q(\mathcal{M}ap(\mathcal{A}, \mathbb{R})) = 0$, für $q > 0$, da G auf \mathcal{A} frei operiert und \mathbb{R} kontrahierbar ist. Damit bleibt die Isomorphie

$$H_G^2(\mathcal{M}ap(\mathcal{A}, \mathbb{T})) \cong H_G^3(\mathbb{Z}) \cong H_G^3(\mathcal{A}/G, \mathbb{Z}).$$

C.2 Erweiterungen als Hauptfaserbündel

Es geht um die Erweiterung

$$1 \rightarrow K \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1.$$

Hier wird gezeigt, daß durch Wahl eines Zusammenhangs im K -Hauptfaserbündel $P \rightarrow X$ eine Erweiterung imitiert wird. Sei $(P, X, \pi, K, \psi, \{\chi_i\})^2$ ein Hauptfaserbündel und $\omega : TP \rightarrow \text{Lie}(K) \equiv \mathfrak{K}$ eine Zusammenhangs-1-Form. Speziell erfüllt ω die Eigenschaft

$$\psi - a^* \omega = (Ada^{-1}) \omega.$$

ψ_a^* ist hier der pullback der K -Wirkung auf P . Sei $\sigma : X \rightarrow P$ ein (lokaler) Einschnitt, das heißt $\chi_i \circ \sigma(x) = (x, 1)$. Nun wollen wir Tangentialvektoren ∂_μ horizontal heben. $\sigma_* \partial_\mu$ ist aber im allgemeinen nicht horizontal, vielmehr gilt

$$\omega(\sigma_* \partial_\mu) = A_\mu.$$

Dabei ist A_μ ein Element aus \mathfrak{K} . Da ω auf fundamentalen Vektorfeldern ΣA_μ das generierende Liealgebraelement A_μ ergibt, ist

$$D_\mu := \sigma_* \partial_\mu - \Sigma A_\mu = \sigma_* \partial_\mu - (\Psi_{\sigma(x)})_* \omega(\sigma_* \partial_\mu)$$

horizontal. Es gilt nämlich:

$$\omega[\sigma_* \partial_\mu - (\Psi_{\sigma(x)})_* \omega(\sigma_* \partial_\mu)] = \omega(\sigma_* \partial_\mu) - \omega(\sigma_* \partial_\mu) = 0.$$

Berechnet man nun den Kommutator zweier solcher Vektorfelder, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] &= \mathcal{L}_{D_\mu} D_\nu \\ &= \mathcal{L}_{D_\mu} \{ \sigma_* \partial_\nu - (\Psi_{\sigma(x)})_* \omega(\sigma_* \partial_\nu) \} \\ &= \mathcal{L}_{\{ \sigma_* \partial_\mu - (\Psi_{\sigma(x)})_* \omega(\sigma_* \partial_\mu) \}} \{ \sigma_* \partial_\nu - (\Psi_{\sigma(x)})_* \omega(\sigma_* \partial_\nu) \} \\ &= \mathcal{L}_{\sigma_* \partial_\mu} \sigma_* \partial_\nu - \mathcal{L}_{(\Psi_{\sigma(x)})_* \omega(\sigma_* \partial_\mu)} \sigma_* \partial_\nu \\ &\quad - \mathcal{L}_{\sigma_* \partial_\mu} (\Psi_{\sigma(x)})_* \omega(\sigma_* \partial_\nu) - \mathcal{L}_{(\Psi_{\sigma(x)})_* \omega(\sigma_* \partial_\mu)} (\Psi_{\sigma(x)})_* \omega(\sigma_* \partial_\nu) \\ &= \sigma_* [\partial_\mu, \partial_\nu] \\ &\quad + \mathcal{L}_{\sigma_* \partial_\nu} (\Psi_{\sigma(x)})_* \omega(\sigma_* \partial_\mu) - \mathcal{L}_{\sigma_* \partial_\mu} (\Psi_{\sigma(x)})_* \omega(\sigma_* \partial_\nu) \\ &\quad + \mathcal{L}_{(\Psi_{\sigma(x)})_* \omega(\sigma_* \partial_\mu)} (\Psi_{\sigma(x)})_* \omega(\sigma_* \partial_\nu) \\ &= \sigma_* [\partial_\mu, \partial_\nu] \\ &\quad + \mathcal{L}_{\sigma_* \partial_\nu} (\Psi_{\sigma(x)})_* \omega(\sigma_* \partial_\mu) - \mathcal{L}_{\sigma_* \partial_\mu} (\Psi_{\sigma(x)})_* \omega(\sigma_* \partial_\nu) \\ &\quad + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* ((\Psi_{\sigma(x)})_* \omega(\sigma_* \partial_\nu)) \end{aligned}$$

²Zur Erklärung der Symbole siehe die Fußnote auf Seite 13

$$\begin{aligned}
&= \dots + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Psi_{\sigma(x)})_* (\tilde{\phi}_t^* \omega) (\sigma_* \partial_v) \\
&= \dots + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Psi_{\sigma(x)})_* (Ad \tilde{\phi}_t^{-1}) \omega (\sigma_* \partial_v) \\
&= \dots - (\Psi_{\sigma(x)})_* ad(\omega(\sigma_* \partial_\mu)) \omega(\sigma_* \partial_v) \\
&= \dots - (\Psi_{\sigma(x)})_* [\omega(\sigma_* \partial_\mu), \omega(\sigma_* \partial_v)] \\
[D_\mu, D_v] &= \sigma_* [\partial_\mu, \partial_v] + \mathcal{L}_{\sigma_* \partial_v}(\Sigma A_\mu) - \mathcal{L}_{\sigma_* \partial_\mu}(\Sigma A_v) - \Sigma([A_\mu, A_v]).
\end{aligned}$$

Dabei ist ϕ_t der Fluß zu ΣA_μ und $\tilde{\phi}_t = \exp[tA_\mu]$ der Fluß zu A_μ in K . Man beachte die Verwendung der am Anfang zitierten Eigenschaft des pullbacks der Rechtswirkung auf Zusammenhangsformen.

Sei nun $c_\tau(\cdot)$ der Fluß zu ∂_μ auf der Basismannigfaltigkeit G . Dann gilt für die Lieableitung $\mathcal{L}_{\sigma_* \partial_\mu} \Sigma A_v$, da der Schnitt σ ja konstant ist,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\sigma_* \partial_\mu} \{(\Psi_{\sigma(x)})_* A_v\} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\sigma_* c_t)^* ((\Psi_{\sigma(x)})_* A_v) \\
&= (\Psi_{\sigma(x)})_* \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A_\mu(\sigma \circ c_t(x)) \right) \\
&= (\Psi_{\sigma(x)})_* \partial_\mu A_v.
\end{aligned}$$

Zusammengefaßt ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
[D_\mu, D_v] &= \sigma_* [\partial_\mu, \partial_v] + \Sigma(\partial_v A_\mu) - \Sigma(\partial_\mu A_v) - \Sigma([A_\mu, A_v]) \\
&= \sigma_* [\partial_\mu, \partial_v] - \Sigma(F_{\mu v}).
\end{aligned}$$

Dabei ist $F_{\mu v}$ die Krümmung in P . Auf der Basismannigfaltigkeit wirkt aber die Gruppe G . Seien also ∂_μ, ∂_v zwei Elemente aus \mathfrak{G} , der Lie-Algebra von G . Diesen entsprechen fundamentale Vektorfelder, die ich hier mit denselben Symbolen bezeichnen will. Seien α, β aus \mathfrak{K} . Lokal kann ich ein fundamentales Vektorfeld eines Elements aus $\text{Lie}(\tilde{G}) \equiv \tilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{G}$ als Summe $D_\mu + \alpha$ schreiben, wobei hier D_μ der horizontale Lift von ∂_μ, ∂_v ist. Für die Lie-Klammer errechnet man:

$$\begin{aligned}
[D_\mu + \alpha, D_v + \beta] &= [D_\mu, D_v] + [D_\mu, \beta] - [D_v, \alpha] + [\alpha, \beta] \\
&= \sigma_* [\partial_\mu, \partial_v] - \Sigma(F_{\mu v}) + \mathcal{L}_{\sigma_* \partial_\mu} \beta - \mathcal{L}_{\sigma_* \partial_v} \alpha + 0.
\end{aligned}$$

Die Lie-Klammer $[\alpha, \beta]$ verschwindet, da K abelsch sein soll. Gleiches gilt für Terme der Gestalt $\mathcal{L}_{(\Psi_{\sigma(x)})_* \omega(\sigma_* \partial_\mu)} \beta$.

Schreibt man Elemente aus $\tilde{\mathfrak{G}}$ als Paare (∂_μ, α) , so ergibt sich:

$$[(\partial_\mu, \alpha), (\partial_v, \beta)] = ([\partial_\mu, \partial_v], -F_{\mu v} + \mathcal{L}_{\partial_\mu} \beta - \mathcal{L}_{\partial_v} \alpha).$$

Die Krümmung ist eine 2-Form mit Werten in \mathfrak{K} . Die Jacobi-Identität erzwingt nun für diese 2-Form folgende Beziehung:

$$\begin{aligned}
& [[(\partial_\mu, \alpha), (\partial_\nu, \beta)], (\partial_\eta, \gamma)] + \text{zykl. Vert.} \\
&= \left[\left([\partial_\mu, \partial_\nu], -F(\partial_\mu, \partial_\nu) + \mathfrak{L}_{\partial_\mu} \beta - \mathfrak{L}_{\partial_\nu} \alpha \right), (\partial_\eta, \gamma) \right] \\
&\hspace{20em} + \text{zykl. Vert.} \\
&= \left([[\partial_\mu, \partial_\nu], \partial_\eta], -F([\partial_\mu, \partial_\nu], \partial_\eta) + \mathfrak{L}_{[\partial_\mu, \partial_\nu]} \gamma \right. \\
&\quad \left. - \mathfrak{L}_{\partial_\eta} \left(-F(\partial_\mu, \partial_\nu) + \mathfrak{L}_{\partial_\mu} \beta - \mathfrak{L}_{\partial_\nu} \alpha \right) \right) + \text{zykl. Vert.} \\
&= \left([[\partial_\mu, \partial_\nu], \partial_\eta], -F([\partial_\mu, \partial_\nu], \partial_\eta) + \mathfrak{L}_{[\partial_\mu, \partial_\nu]} \gamma + \mathfrak{L}_{\partial_\eta} F(\partial_\mu, \partial_\nu) \right. \\
&\quad \left. + \mathfrak{L}_{\partial_\eta} \mathfrak{L}_{\partial_\mu} \beta + \mathfrak{L}_{\partial_\eta} \mathfrak{L}_{\partial_\nu} \alpha \right) + \text{zykl. Vert.}
\end{aligned}$$

Die erste Komponente verschwindet wegen der Jacobi-Identität. Betrachten wir nur noch die zweite. Die Lie-Ableitung zweier Vektorfelder ist aber der Kommutator. Es gilt demnach

$$\mathfrak{L}_{[\partial_\mu, \partial_\nu]} \gamma - \mathfrak{L}_{\partial_\mu} \mathfrak{L}_{\partial_\nu} \gamma + \mathfrak{L}_{\partial_\nu} \mathfrak{L}_{\partial_\mu} \gamma = 0.$$

Angewendet auf die zweite Komponente ergibt dies

$$\begin{aligned}
& -F([\partial_\mu, \partial_\nu], \partial_\eta) + \underline{\mathfrak{L}_{[\partial_\mu, \partial_\nu]} \gamma} + \mathfrak{L}_{\partial_\eta} F(\partial_\mu, \partial_\nu) - \mathfrak{L}_{\partial_\eta} \mathfrak{L}_{\partial_\mu} \beta + \mathfrak{L}_{\partial_\eta} \mathfrak{L}_{\partial_\nu} \alpha \\
& - F([\partial_\nu, \partial_\eta], \partial_\mu) + \mathfrak{L}_{[\partial_\nu, \partial_\eta]} \alpha + \mathfrak{L}_{\partial_\mu} F(\partial_\nu, \partial_\eta) - \underline{\mathfrak{L}_{\partial_\mu} \mathfrak{L}_{\partial_\nu} \gamma} + \mathfrak{L}_{\partial_\mu} \mathfrak{L}_{\partial_\eta} \beta \\
& - F([\partial_\eta, \partial_\mu], \partial_\nu) + \mathfrak{L}_{[\partial_\eta, \partial_\mu]} \beta + \mathfrak{L}_{\partial_\nu} F(\partial_\eta, \partial_\mu) - \mathfrak{L}_{\partial_\nu} \mathfrak{L}_{\partial_\eta} \alpha + \underline{\mathfrak{L}_{\partial_\nu} \mathfrak{L}_{\partial_\mu} \gamma} \\
&= -F([\partial_\mu, \partial_\nu], \partial_\eta) - F([\partial_\nu, \partial_\eta], \partial_\mu) - F([\partial_\eta, \partial_\mu], \partial_\nu) \\
&\quad + \mathfrak{L}_{\partial_\eta} F(\partial_\mu, \partial_\nu) + \mathfrak{L}_{\partial_\mu} F(\partial_\nu, \partial_\eta) + \mathfrak{L}_{\partial_\nu} F(\partial_\eta, \partial_\mu).
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$(\partial F)(\partial_\mu, \partial_\nu, \partial_\eta) = 0, \tag{C.2.2}$$

wobei

$$\partial : \Omega^n(\mathfrak{K}) \rightarrow \Omega^{n+1}(\mathfrak{K})$$

definiert ist durch (Sei $F \in \Omega^n(\mathfrak{K})$)

$$\begin{aligned}
(\partial F)(X_1, \dots, X_{n+1}) &:= \\
& \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^i (-1)^{i+j+1} F([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{n+1}) \\
& + \sum_{i=1}^{n+1} \mathfrak{L}_{X_i} F(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{n+1}).
\end{aligned}$$

Ist nun speziell $\mathfrak{K} = \mathbb{C}$, wie in dieser Arbeit, so unterscheiden sich die Krümmungen zu zwei unterschiedlichen Zusammenhängen ω_1, ω_2 um das Differential der Differenz,

$$F_2 = F_1 + d(\omega_2 - \omega_1).$$

Das totale Differential d läßt sich aber für komplexwertige n -Formen auch schreiben als

$$\begin{aligned} (d\alpha)(X_1, \dots, X_{n+1}) = & \\ & \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^i (-1)^{i+j+1} \alpha([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{n+1}) \\ & + \sum_{i=1}^{n+1} X_i (\alpha(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{n+1})). \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist damit gleich der Lie-Ableitung von

$$\alpha(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_n)$$

nach X_i und die Krümmungen unterscheiden sich um einen \mathfrak{d} -Korand,

$$F_2 = F_1 + \mathfrak{d}(\omega_2 - \omega_1). \quad (\text{C.2.3})$$

Anhang D

δ -Kohomologie

Dieses Kapitel folgt [26]. Es ist hier nur der Vollständigkeit halber aufgeführt.

Sei $\pi : Y \rightarrow X$ eine Faserung. Sei

$$Y^{[p]} := \{(y_1, \dots, y_p) \in Y^p \mid \pi(y_1) = \dots = \pi(y_p)\}$$

das p -fache Produkt (wobei $Y^{[0]} = X$ als Vereinbarung gelten soll) und

$$\pi_i : Y^{[p]} \ni (y_1, \dots, y_p) \rightarrow (y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_p) \in Y^{[p-1]}$$

die Projektion, die den i -ten Faktor ausläßt. Sei weiter $\omega^{(q)}$ eine q -Form über $Y^{[p]}$ und δ definiert über das pullback von π_i ,

$$\delta : \Omega^q(Y^{[p-1]}) \ni \omega^{(q)} \mapsto \sum_{i=1}^p (-1)^i \pi_i^* (\omega^{(q)}) \in \Omega^q(Y^{[p]}).$$

Offensichtlich ist

$$\delta^2 = 0.$$

Hier wird nun gezeigt, daß für alle δ -Kozykel aus $\Omega^n(Y^{[p]})$ ein δ -Korand existiert. Da hier komplexwertige Formen betrachtet werden, kann man die Faserung als trivial annehmen und den allgemeinen Fall dann mit einer Zerlegung der 1 erhalten. Sei also $Y = X \times F$, wobei F die Faser ist. Damit nimmt $Y^{[p]}$ die einfache Gestalt

$$Y^{[p]} = X \times F^p$$

an. Sei $X = (X_1, \dots, X_q)$ ein q -Tangentialvektor an F und $f^{(p)} = (f_1, \dots, f_p)$ ein Punkt in F^p . Sei außerdem m ein Punkt in X und ξ ein q -Tangentialvektor an X . Es gilt damit für $\omega \in \Omega^n(Y^{[p]})$:

$$\begin{aligned} & (\delta \omega)_{(m, f^{(p+1)})} (\xi, (X_1, \dots, X_{p+1})) \\ &= \sum_i (-1)^i \omega_{(m, \pi_i(f^{(p+1)}))} (\xi, (X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1})). \end{aligned} \quad (\text{D.0.1})$$

Seien nun $f \in F$ und $X \in T_f F$ fixiert. Definiert man nun $\rho \in \Omega^q(Y^{[p]})$ durch

$$\rho_{(m, f_1, \dots, f_p)}(\xi, (X_1, \dots, X_p)) := \omega_{(m, f_1, \dots, f_p, f)}(\xi, (X_1, \dots, X_p, X)),$$

so folgt aus $\delta\omega = 0$ und (D.0.1), daß $\delta\rho = (-1)^{p+1}\omega$.

Betrachten wir nun den allgemeinen Fall. Sei U_α eine Überdeckung von X mit subordinierter Partition der 1 ψ_α , so daß Y trivial ist über jedem U_α . Der Satz der ψ_α gibt auch eine Zerlegung von $Y^{[p]}$. Sei wieder $\omega \in \Omega^q(Y^{[p]})$ und $\omega|_{U_\alpha} = \rho_\alpha$. Wendet man das obige Argument an, so ergibt sich

$$\omega = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha} (\delta\rho_{\alpha}) = \delta \left(\sum_{\alpha} \psi_{\alpha} \rho_{\alpha} \right) =: \delta\rho.$$

Dabei wurde verwendet, daß man auf $Y^{[p]}$ eine Partition der Eins erhält, die über π mit ψ_α übereinstimmt. Für $p = 1$ erhält man einen Spezialfall von (D.0.1), nämlich

$$\omega_{(m, f_1)}(\xi, X_1) = \omega_{(m, f_2)}(\xi, X_2),$$

mit anderen Worten, ω hängt gar nicht vom F -Eintrag ab. □

Literaturverzeichnis

- [1] Araki, Huzihiro: *Canonical Anticommutation Relations*. Cont. Math. **62**, p.23-141.
- [2] Atiyah, M.F. and I.M. Singer: *Dirac Operators Coupled to Vector Potentials*. Proc.Natl.Acad.Sci.USA **81**, 2597-2600 (1984).
- [3] Azcárraga, J.A. de: *Lie Groups, Lie Algebras, Cohomology, and some Applications in Physics*. Cambr. Univ. Press, Cambridge 1995, ch. 4.
- [4] Berline, N., E. Getzler, and M. Vergue *Heat Kernels and Dirac Operators*. Springer 1992
- [5] Bertlmann, R.A.: *Anomalies in Quantum Field Theory.*, Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [6] Боголюбов, Н.Н. и Д.В. Ширков: *Введение в теорию квантованных полей.*, Издательство «Наука», Москва, 1973 г.
- [7] Bott, R. and L.W. Tu: *Differential Forms in Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics vol. 82, Springer, 1986.
- [8] Brylinski, J-L.: *Loop Spaces, Characteristic Classes, and Geometric Quantization*. Birkhäuser, Berlin, 1992.
- [9] Carey, A.L., J. Mickelsson and M.K. Murray: *Index Theory, Gerbes, and Hamiltonian Quantization*. Commun.Math.Phys. **183**, 707-722(1997).
- [10] Carey, A.L. and M.K. Murray: *Mathematical Remarks on the Cohomology of Gauge Groups and Anomalies*. In “Confronting the Infinite”, Proceedings of a Conference in Celebration of the 70th Years of H.S. Green and C.A. Hurst. Singapore, World Scientific, 1997; hep-th/9408141.
- [11] Carey, A.L. and M.K. Murray: *Faddeev’s Anomaly and Bundle Gerbes*. Let.Math.Phys. **37**, 29-36(1996).

- [12] Crell, B.: Unveröffentlichtes Vorlesungsskriptum.
- [13] Daniel, M. and C.M. Viallet: *The Geometrical Setting of Gauge Theories of the Yang-Mills Type*. Rev.Mod.Phys. **52** No.1 (1980), p.175-197.
- [14] Dixmier, Jacques et Adrien Douady: *Champs continus d'espaces Hilbertiens et de C^* -algèbres*. Bull.Soc.math.France **91**, 1963, p.227 à 284
- [15] Donaldson, S.K. and P.B. Kronheimer: *The Theory of Four-Manifolds*. Clarendon Press, Oxford 1990, p.31-37, 196.
- [16] Faddeev, L.: *Hamiltonian Approach to the Theory of Anomalies*. in *Recent Developments in Math. Phys.*, Proc. of the XXVI. Int. Universitätswochen für Kernphysik Schladming. Siehe auch *40 Years in Math. Phys.* vol. 2, World Scientific, 1995.
- [17] Фаддеев, Л.Д. и С.Л. Шаташвили: *Алгебраические и гамильтоновы методы в теории неабелевых аномалий*. Теорет.матем.физ. **60**, No.2, август 1984 г., с.206-217.
Englische Übersetzung:
Faddeev, L.D. and S.L. Shatashvili: *Algebraic and Hamiltonian Methods in the Theory of Nonabelian Anomalies*. Theoret.Math.Phys. **60**, 770 (1985).
- [18] Feynman, R.: *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics*. Rev.Mod.Phys.**20**(1948), p.367-387.
- [19] Fujikawa, K.: *Path Integral for Gauge Theories with Fermions*. Phys.Rev.D **21** (10), 2848 (1980).
- [20] Grosche, G., V. Ziegler, D. Ziegler. und E. Zeidler: *Teubner-Taschenbuch der Mathematik II*. B. G. Teubner Stuttgart, Leipzig 1995.
- [21] Kobayashi and Nomizu: *Foundations of Differential Geometry*. Interscience, New York 1969.
- [22] Langmann, E.: *Non-commutative Integration Calculus*. J.Math.Phys. **36**, 3822 (1995).
- [23] Langmann, E.: *On Anomalies and Noncommutative Geometry*. Proceedings of the 34. Internat. Universitätswochen für Kern- und Teilchenphysik Schladming, Schladming March 1995, Springer. hep-th-9507088.
- [24] Langmann, E.: *Quantum Gauge Theories and Noncommutative Geometry*. Beitrag zum Workshop 'New Ideas in the Theory of Fundamental Interactions', Szczyrk 1995, Acta Phys. Polon. **B27**(1996), 2477-2496, hep-th-9608003.

- [25] Mickelsson, J.: *Chiral Anomalies in Even and Odd Dimensions*.
Comm.Math.Phys.**97**,361 (1985).
- [26] Murray, M.K.: *Bundle gerbes*. J.London Math.Soc.(2) **54**(1996), p.403-416.
- [27] Nash, C.: *Differential Topology and Quantum Field Theory*. Acad. Press,
London, 1991.
- [28] Noether, E.: *Invariante Variationsprobleme*.
Nachr.Kgl.Ges.Wiss. Göttingen, Math.-phys.Kl., 1918, S.235 und
Noether, E.: *Invarianten beliebiger Differentialausdrücke*.
Nachr.Kgl.Ges.Wiss. Göttingen, Math.-phys.Kl., 1918, S.37.
- [29] Segal, G.: *Faddeev's anomaly in Gauß's law*. Oxford 1985 (nicht veröffentlicht).
- [30] Sidenius, J.: *Anomalies and Differential Geometry*. Nordisk Institut for Teoretisk Atomfysik preprint NORDITA-85 / 33, København, March 1985.
- [31] Wess, J. and B. Zumino: *Consequences of Anomalous Ward Identities*.
Phys.Lett.**B37**, 95 (1971).

Zusammenfassung

Hintergrund der Arbeit ist die Quantisierung chiraler Fermionen im äußeren Yang-Mills-Feld. Die dabei auftretenden Eichanomalien zeigen sich bei II.Quantisierung in veränderten Vertauschungsregeln der „Darstellungsoperatoren“¹ Liealgebra der Eichgruppe (Schwinger-Terme, [1, 5]) oder in der Geometrie gewisser Linienbündel, deren Chernklassen über das Indextheorem einen Ausdruck für die nichtverschwindende Divergenz der Ströme liefern.

Anliegen der Arbeit war es, ausgehend von den Arbeiten von Carey, Mickelson und Murray ([10, 9, 26]), die Geometrie der Anomalien bei Hamiltonscher Quantisierung zu untersuchen und den Zusammenhang mit den Schwinger-Termen, die in der euklidischen Pfadintegral-Methode errechnet werden, zu verstehen.

Die zugrundeliegende Mannigfaltigkeit ist zunächst der dreidimensionale physikalische Raum, allgemein jedoch ein ungeraddimensionaler Raum.

In einer fermionischen chiralen Theorie mit äußerem (=klassischem) Yang-Mills-Feld erhält man eine Familie von Diracoperatoren, parametrisiert mit dem jeweils vorhandenen Yang-Mills-Feld. Die Hamiltonsche Sichtweise erlaubt die Einführung des Energiebegriffs², indem man in der Diracgleichung die Zeitableitung abspaltert. Man kann aber nicht einfach für jeden einzelnen Diracoperator aus dieser Familie die Aufspaltung in Eigenräume positiver bzw. negativer Energie vornehmen, da eventuell vorhandene Nullmoden Mehrdeutigkeiten ergeben. Um diese auszuschließen, führt man eine lokale Überdeckung \mathcal{U} von \mathcal{A} , dem Raum aller Eichpotentiale, ein. \mathcal{U} wählt man so, daß in jeder offenen Menge U aus \mathcal{U} eine reelle Zahl λ existiert, die in keinem der Spektren der Diracoperatoren zu den Potentialen aus U vorkommt. Man findet auf diese Weise über jeder derartigen offenen Menge aus \mathcal{U} ein Fockbündel, das heißt, ein Vektorbündel mit Fockraum als typische Faser. Es könnte ja nun der Fall sein, daß sich derartige Überdeckung der Mannigfaltigkeit finden läßt, die nur aus einer einzigen offenen Menge besteht.

¹Was anzeigt, daß Eichsymmetrie gebrochen (nur projektiv realisiert) ist oder, in Faddeevs [16] Interpretation, nur verändert (über eine Gruppenerweiterung) wirkt.

²Unter der Voraussetzung, daß man für jedes A aus dem Raum der Eichfelder eine Eichtransformation findet, die dieses in die temporäre Eichung überführt.

Dem ist aber nicht so. Eine nützliche Konstruktion in diesem Zusammenhang ist der Raum $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A} \times \mathbb{R}$, der aus allen Paaren (A, λ) besteht, die

$$\lambda \notin \text{Spec}\{\mathcal{D}_A\}$$

erfüllen. Eine Überdeckung von \mathcal{A} mit nur einer offenen Menge wie oben entspricht dann einem Schnitt

$$s : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_0.$$

Physikalisch bedeutet letzteres die Existenz eines globalen (d.h. für alle Konfigurationen des Yang-Mills-Feldes) Vakuumschnittes. Solch ein Schnitt läßt sich jedoch nicht ohne weiteres finden, vielmehr tritt das Phänomen des Spektralflusses auf. \mathcal{A}_0 liefert auf natürliche Weise ein mögliches System von offenen Überdeckungen von \mathcal{A} , über dem sich lokale Fockbündel konstruieren lassen. Auf dem (nichtleer angenommenen) Durchschnitt zweier offener Mengen existieren dann Übergangsabbildungen, deren Determinantenbündel DET ein \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel über $\mathcal{A}_0^{[2]}$ ergibt³. DET besitzt aber zusätzlich noch eine Gruppoid-Multiplikation \otimes zwischen Fasern, die von der Komposition der Übergangsfunktionen der lokalen Fockbündel induziert wird. Eine derartige Konstruktion $(DET, \mathcal{A}_0, \mathcal{A}, \otimes)$ heißt Gerbe und wurde zuerst von Murray [26] eingeführt. Dabei muß $\mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{A}$ eine Submersion sein. Die Struktur des dem \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel zugrundeliegenden Basisraumes $\mathcal{A}_0^{[2]}$ ist wichtig für den Begriff des trivialen Gerbes. Ein Gerbe (P, Y, X, \otimes) ist trivial, wenn Faser von P über $Y^{[2]}$ aus Übergangsfunktionen eines \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündels L über Y entstehen,

$$DET \cong L^* \otimes L.$$

Trivialität im Gerbesinne und Trivialität im Hauptfaserbündelsinne sind unterschiedliche Begriffe. Es zeigt sich, daß das Gerbe DET dann und nur dann trivial ist, wenn ein globales Fockbündel über \mathcal{A} existiert. (Allgemein findet man mit der obigen Konstruktionsmethode nur ein projektives Bündel, weil die Übergangsfunktionen nur modulo Multiplikation mit komplexen Zahlen zusammenpassen.) Die Trivialität des Gerbes DET wird aber durch eine Klasse aus der Čech-Kohomologie $\check{H}^3(\mathcal{A}, \mathbb{Z})$, die Dixmier-Douady-Klasse, beschrieben. Verschwindet diese Kohomologie, so ist DET trivial und umgekehrt. Dies gilt natürlich allgemein für Gerbes. $\check{H}^3(\mathcal{A}, \mathbb{Z})$ ist aber isomorph zur deRham-Kohomologie $H_{dR}^3(\mathcal{A})$, siehe z.B. [7]. Das Bild der Dixmier-Douady-Klasse unter diesem Isomorphismus heißt Dixmier-Douady-Form.

Die Multiplikationsstruktur in DET erlaubt die Auszeichnung bestimmter Zusammenhangs-1-Formen in DET , den Gerbezusammenhängen. Die Transgression

³ $\mathcal{A}_0^{[2]} := \{(A, \lambda, \mu) \in \mathcal{A} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \lambda, \mu \notin \text{Spec}\{\mathcal{D}_A\}\}$

der Krümmung dieser speziellen Zusammenhänge ergibt eine 3-Form über \mathcal{A} , welche in derselben Klasse wie die Dixmier-Douady-Form liegt.

Weiter wurde bewiesen, daß $(DET, \mathcal{A}_0, \mathcal{A}, \otimes)$ trivial ist. Die Trivialisierung

$$DET \cong IND^* \otimes IND \quad (4.0.2)$$

entstand aus dem Spektralfluß entlang von Kurven in \mathcal{A} , wenn man einen Punkt in \mathcal{A} als Referenz wählte.

Soweit die Situation über \mathcal{A} . Wie in der Einleitung motiviert, ist es aber physikalisch von Interesse, obige Untersuchung für den Eichorbitraum \mathcal{A}/\mathcal{G} anstatt für \mathcal{A} durchzuführen. In dieser Arbeit bezeichnet \mathcal{G} die punktierte Gruppe der Eichtransformationen⁴. Mit Blick auf (4.0.2) läßt sich die Frage nach der Trivialität von $(DET^{\mathcal{G}}, \mathcal{A}_0/\mathcal{G}, \mathcal{A}/\mathcal{G}, \otimes)$ (und damit die Frage nach der Existenz eines „physikalischen“ Fockbündels über \mathcal{A}/\mathcal{G}) folgendermaßen beantworten:

Ist die \mathcal{G} -Wirkung auf IND und DET verträglich mit (4.0.2), so gilt

$$DET/\mathcal{G} =: DET^{\mathcal{G}} \cong IND^*/\mathcal{G} \otimes IND/\mathcal{G},$$

und $(DET^{\mathcal{G}}, \mathcal{A}_0/\mathcal{G}, \mathcal{A}/\mathcal{G}, \otimes)$ ist trivial. Es gilt auch die Umkehrung. Oben hatten wir gesehen, daß ein Gerbe durch seine Dixmier-Douady-Klasse beschrieben wird, hier ein Element aus $\check{H}^3(\mathcal{A}/\mathcal{G}, \mathbb{Z})$. Diese Klasse beschreibt aber auch⁵ Gruppenerweiterungen von \mathcal{G} um $\text{Map}(\mathcal{A}, \mathbb{T})$ als Liftung der \mathcal{G} -Wirkung (auf der Basismanigfaltigkeit) in ein \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel. Hier ist die Verbindung zur Anwendung des Indextheorems, denn das \mathbb{C}_* -Hauptfaserbündel IND entstand in einer äquivalenten Beschreibung aus dem Index einer Familie von um die ‘Zeitrichtung’ ergänzten Diracoperatoren (über einer Mannigfaltigkeit $M \times [0, 1]$ gerader Dimension mit Rand)

$$\mathbb{D}_{A_t} + \frac{\partial}{\partial t} \quad ; \quad A(t) := A_0 f(t) + (1 - f(t)) A$$

mit gewissen Randbedingungen über $M \times [0, 1]$. Dieses Indexbündel wird durch seine 1. Chernklasse bestimmt, die wiederum Liftungen der \mathcal{G} -Wirkung beschreibt. Das Indextheorem stellt nun eine Verbindung zwischen der 1. Chernklasse von IND und der $(n + 2)$ -ten Chernklasse des zum G -Hauptfaserbündel assoziierten Vektorbündels her. Integration der $(2n + 4)$ -Form über M ergibt eine 2-Form, die für die verschiedenen Dimensionen der Mannigfaltigkeit M kohomolog zu den bekannten Schwinger-Termen ist.

Es wäre interessant, zu wissen, ob eine noch unmittelbarere Verbindung zwischen den Anomaliecharakteristiken im Hamiltonschen Zugang und dem Euklidischen Zugang, z.B. über ein „geeignetes“ Indextheorem für ungeraddimensionale Mannigfaltigkeiten, besteht.

⁴Diese Einschränkung ist notwendig, um eine freie Gruppenwirkung auf \mathcal{A} zu erhalten.

⁵Über den Isomorphismus $H^2(\text{Map}(\mathcal{A}, \mathbb{T})) \cong H^3_{\mathcal{G}}(\mathcal{A}/\mathcal{G}, \mathbb{Z})$.

Danksagung

Ich danke Herrn Prof. Dr. Gerd Rudolph für die Vergabe dieses interessanten Themas sowie Herrn Dr. Bernd Crell für die sowohl unkomplizierte als auch kritische Betreuung und seine große Bereitschaft, Fragen zu klären. Die Diskussionen mit Herrn Dr. Bernd Crell waren sehr hilfreich in Bezug auf technische Details wie auch auf die Gesamtorientierung dieser Arbeit. Desweiteren möchte ich der ganzen Abteilung Mathematische Physik für die aufgeschlossene Atmosphäre und die immer vorhandene Bereitschaft, zuzuhören, danken.

Zum Schluß sei hier noch den Damen stud. pharm. Susanne Schulz und stud. pharm. Beate Pietsch sowie Herrn cand. phys. cand. math. Christian Fleischhack für das Korrekturlesen einzelner Kapitel sowie Herrn Dr. Bernd Crell für abschließende Hinweise mein Dank ausgesprochen.

Leipzig, im August 1997.

Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre hiermit, daß ich die vorliegende Diplomarbeit selbständig und ausschließlich unter Benutzung der angegebenen Literatur angefertigt habe.

Leipzig, im August 1997

Abtretung an die Bibliothek

Hiermit erkläre ich mich einverstanden, daß meine Diplomarbeit nach positiver Begutachtung zur Benutzung in der Zweigstelle Physik der Universitätsbibliothek Leipzig zur Verfügung steht.

Leipzig, im August 1997