

# Multisymplektische Feldtheorie

Eine kovariant Hamiltonsche Formulierung



Inauguraldissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Fakultät für Physik  
der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg im Breisgau,  
vorgelegt von

**Peter Cornelius Paufler**

aus Dresden.

Oktober 2001

Dekan: Prof. Dr. Kay Königsmann

Leiter der Arbeit: Prof. Dr. Hartmann Römer

Referent: Prof. Dr. Hartmann Römer

Korreferent: Prof. Dr. Jochum J. van der Bij

Tag der Verkündung des Prüfungsergebnisses: 13.12.2001

Teile der Arbeit sind erschienen in:

C. PAUFLER: *A Vertical Exterior Derivative in Multisymplectic Geometry and a Graded Poisson Bracket for Nontrivial Geometries*, Rep. on Math. Phys. **47** (2001),101-119.

C. PAUFLER: *On the Geometry of Field Theoretic Gerstenhaber Structures*. [math-ph/0102012](#), Vortrag auf dem 32nd Symposium on Mathematical Physics, Toruń, Poland, June 2000, angenommen zur Publikation in Rep. on Math. Phys. **48** (2001).

## **Zusammenfassung**

Die multisymplektische Geometrie ist die kovariante Erweiterung der symplektischen Geometrie der Hamiltonschen Mechanik. Sie dient zur geometrischen Formulierung klassischer Feldtheorien.

In diesem Rahmen wird untersucht, inwieweit der Begriff der Hamiltonschen  $n$ -Vektorfelder zur Beschreibung von Lösungen der Feldgleichungen benutzt werden kann. Es zeigt sich, daß im Gegensatz zur klassischen Hamiltonschen Mechanik eine zusätzliche Struktur vonnöten ist, nämlich die kovariante Hamilton-Jacobische Differentialgleichung.

Aufbauend auf diesen Konzepten wird eine Korrektur der üblichen Definition der Poisson-Lie-Klammer vorgeschlagen, die nun eine Super-Jacobi-Identität erfüllt. Dazu muß man die unerwünschte Mehrdeutigkeit in der Korrespondenz von Hamiltonschen Formen und Hamiltonschen Multivektorfeldern auf Seiten der Multivektorfelder beseitigen. Dies erfolgt hier mit dem Begriff der Poissonschen Form.

## **Abstract**

Multisymplectic geometry is the covariant extension of the symplectic geometry of Hamiltonian mechanics. It is a means of geometrically formulating classical field theory.

Within this framework we investigate in what sense the notion of Hamiltonian  $n$ -vector fields can be used to describe solutions to the field equations. In contrast to classical mechanics, an additional structure is necessary. This structure is provided by a covariant version of the Hamilton-Jacobi differential equation.

Building on these concepts a correction of the usual definition of Poisson-Lie brackets is proposed. The resulting bracket is shown to satisfy a super Jacobi identity. In order to achieve this, the undesirable ambiguity in the correspondence between Hamiltonian forms and Hamiltonian multi-vector fields on the side of the latter has to be resolved. This is accomplished by introducing the notion of a Poisson form.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Lagrangesche Formulierung</b>	<b>11</b>
2.1	Jet-Strukturen . . . . .	12
2.2	Variationsprinzip und Euler-Lagrange-Gleichung . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Multisymplektische Geometrie</b>	<b>17</b>
3.1	Multisymplektische Phasenräume . . . . .	17
3.1.1	Definitionen . . . . .	17
3.1.2	Kanonische multisymplektische Formen . . . . .	20
3.1.3	Vertikale äußere Ableitung und multisymplektische Formen auf $\Pi$ . . . . .	21
3.2	Die kovariante Legendre-Transformation . . . . .	23
3.3	Die De Donder-Weyl-Gleichung als kovariante Hamiltonsche Bewegungsgleichung . . . . .	24
3.4	Hamiltonsche Formen und Multivektorfelder . . . . .	25
3.5	Kovariante Impulsabbildungen . . . . .	31
3.6	Korrespondenz von Multivektorfeldern und Lösungen der Feldgleichungen . . . . .	33
3.6.1	Multivektorfelder und Distributionen . . . . .	33
3.6.2	Zerlegung Hamiltonscher $n$ -Vektorfelder . . . . .	35
3.6.3	Integrabilität und kovariante Hamilton-Jacobische Differentialgleichung . . . . .	39
3.6.4	Das freie Klein-Gordon-Feld als Beispiel . . . . .	42
3.6.5	Geometrische Formulierung der kovarianten Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Algebraische Aspekte</b>	<b>45</b>
4.1	Problemstellung . . . . .	45
4.2	Schouten-Klammer und Lie-Ableitung nach Multivektorfeldern . . . . .	46

4.3	Super-Poisson-Lie-Klammer auf dem erweiterten multisymplektischen Phasenraum . . . . .	53
4.3.1	Motivation und Definition . . . . .	53
4.3.2	Poissonsche Formen und Wohldefiniertheit . . . . .	55
4.3.3	Beweis der Jacobi-Identität . . . . .	59
4.3.4	Die Kanatchikovsche Gerstenhaber-Algebra für horizontale Formen auf $\Pi$ . . . . .	62
4.3.5	Gerstenhaber-Struktur . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Zusammenhang mit bekannten Strukturen für Feldtheorien</b>	<b>67</b>
5.1	Kanonische symplektische Struktur auf dem Raum der Anfangskonfigurationen . . . . .	67
5.2	Kanonische Konstruktion des Energie-Impulstensors . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Ausblick</b>	<b>71</b>
<b>A</b>	<b>Zusammenhänge und Jetbündel</b>	<b>73</b>
A.1	Zusammenhänge in $\mathcal{E}$ . . . . .	73
A.2	Isomorphie von $\mathfrak{J}^1\mathcal{E}$ und $\mathfrak{W}\mathcal{E} \otimes T^*\mathcal{M}$ . . . . .	74
A.3	Ein Zusammenhang in $\Pi$ . . . . .	75
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>77</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der multisymplektischen Formulierung von Feldtheorien. Wir betrachten also ganz allgemein eine Theorie, deren fundamentale Objekte, die Felder, lokale Schnitte in einem Faserbündel  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$  über einer  $n$ -dimensionalen orientierbaren Basismannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  – der Raum-Zeit – sind.

Feldtheorien, also etwa die Gravitations- oder Yang-Mills-Theorie, stellen den Prototyp zur theoretischen Erklärung der uns umgebenden Naturphänomene dar, für die eine Quantenversion wünschenswert ist.

Ausgangspunkt der klassischen Formulierung einer solchen Theorie ist die Angabe einer Lagrangefunktion, aus der – mit der Forderung nach Stationarität des Wirkungsfunktional – die Feldgleichungen abgeleitet werden können. Diese stellen partielle Differentialgleichungen dar, die man – geleitet von den Erfolgen bei der Quantisierung der Theorie eines klassischen Punktteilchens – als zeitliche Entwicklungsgleichungen für räumlich gegebene Sätze von Funktionen zu interpretieren sucht. Diesen Übergang bezeichnet man als die Hamiltonsche Formulierung der Theorie. Nach den allgemeinen Prinzipien der Quantisierung (im Sinne der Deformation von Algebren, [4, 79], für eine Anwendung auf Feldtheorien siehe [16]) gilt es, den algebraischen Rahmen – das sind insbesondere die klassischen Observablen und die Poisson-Struktur – ausfindig zu machen.

Dabei treten typischerweise Probleme mathematischer Natur auf, die keine Entsprechung in der Behandlung der klassischen Mechanik haben. Der Phasenraum, d.h. die Menge aller Ausgangskonfigurationen, die den zeitlichen Verlauf des Systems eindeutig bestimmen können, trägt nicht die Struktur einer endlichdimensionalen Mannigfaltigkeit; man spricht in diesem Zusammenhang von Theorien mit unendlich vielen Freiheitsgraden ([47]). Damit stellt sich sofort die Frage nach dem Begriff der Differenzierbarkeit und der Definition des Tangential- bzw. Kotangentialraumes. Durch die Komplexität der Bewegungsgleichungen, die im allgemeinen partielle, nichtlineare Differentialgleichungen darstellen, erweist sich die Charakterisierung eines minimalen Satzes von Ausgangsdaten als sehr schwierig (Für die Theorie der Gravitation siehe zum Beispiel [28], für die  $\phi^4$ -Theorie siehe [68]). Weiter existiert zwar auf dem Phasenraum eine geschlossene 2-Form, diese ist aber nur im schwachen Sinne nicht ausgeartet und erschwert damit die Zuordnung Hamiltonscher Vektorfelder zu Hamilton-Funktionen ([13, 80]).

Der Hamiltonschen Formulierung einer relativistischen Feldtheorie haftet zudem noch ein weiteres Problem an, das eher physikalischer Natur ist. Zur Frage nach einer zeitlichen Entwicklung muß naturgemäß auf der gegebenen Raum-Zeit eine zeitartige Richtung ausgezeichnet werden. Die Art

der Feldgleichungen erzwingt nun, daß die Anfangsdaten auf einer dazu komplementären, raumartigen Hyperfläche anzugeben sind. Dies erfordert eine sogenannte  $3 + 1$ -Zerlegung der Raum-Zeit und stellt damit eine Einschränkung an die erlaubten Mannigfaltigkeiten dar. Darüberhinaus sind mit der Beschränkung auf eine derartige Untermannigfaltigkeit nicht mehr beliebige Diffeomorphismen der Raum-Zeit möglich. Die Hamiltonsche Formulierung kann damit nicht mehr auf natürliche Weise die volle Symmetriegruppe tragen.

Auf der anderen Seite stellt sich die Frage, inwiefern unerwartete Resultate wie etwa das Auftreten von Anomalien bei der Quantisierung von Feldtheorien mit Symmetrien ([7]) durch die funktional-analytischen Fragen der Behandlung unendlichdimensionaler Objekte begründet sind oder ob sie sich durch ein algebraisches Studium der Quantisierungsprozedur verstehen lassen ([70]).

In dieser Arbeit soll nun ein alternativer Zugang zur algebraischen Formulierung vorgestellt werden, der zum einen ausschließlich auf Mannigfaltigkeiten endlicher Dimension zurückgreift und zum anderen keine Auszeichnung einer Zeitrichtung und damit keine Brechung der relativistischen Kovarianz erfordert. Dieser Zugang kann als ein Zwischenglied zwischen Lagrangescher und Hamiltonscher Sichtweise aufgefaßt werden. Er ist darüberhinaus der geeignete Rahmen für die Formulierung des Noetherschen Theorems ([77, 62]). Es besteht die Hoffnung, auf diese Weise die neuere, deformationstheoretische Herangehensweise an die lokale Quantenfeldtheorie ([18, 19]) auf klassischem Niveau zu verstehen.

Ausgangspunkt ist dabei die Überlegung, daß die Bahnen der Punktteilchen in der klassischen Mechanik als eindimensionale Schnitte in dem um die Zeitachse erweiterten Konfigurationsraum aufgefaßt werden können. Die Felder jeder Feldtheorie erscheinen jetzt als höherdimensionales Analogon der Kurven, jede der Koordinaten der Raum-Zeit ist damit ein Entwicklungsparameter für sich, vergleiche Abbildung 1.1. Dies hat zur Folge, daß im Gegensatz zum gewöhnlichen Hamiltonschen

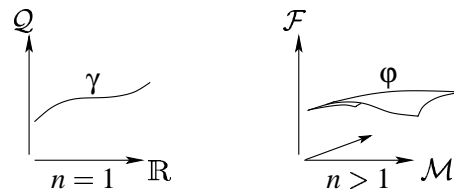


Abbildung 1.1: Im Falle  $n = 1$ , der Punktmechanik, stellt  $Q$  den Konfigurationsraum dar und  $\mathbb{R}$  die Zeitachse. Parametrisierte Kurven  $\gamma$  in  $Q$  lassen sich als Schnitte im trivialen Bündel  $Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  auffassen. Im feldtheoretischen Fall  $n > 1$  sind die Felder  $\phi$  Schnitte in einem Faserbündel  $\mathcal{E}$  mit typischer Faser  $\mathcal{F}$  über einer Raum-Zeit  $\mathcal{M}$ .  $\mathcal{F}$  kann als Pendant des Konfigurationsraumes  $Q$  angesehen werden, aber das Bündel  $\mathcal{E}$  braucht nicht mehr trivial zu sein.

Bild zu jeder Feldvariable  $n$  konjugierte Impulse einzuführen sind. Die Hamiltonsche Mechanik ist nun lediglich der Spezialfall  $n = 1$ ,  $\mathcal{M} = \mathbb{R}$ . Die entsprechende kovariante Legendre-Transformation, die vom Lagrangeschen zum kovariant Hamiltonschen Bild führen soll – sie geht zurück auf Arbeiten von CARATHÉODORY [11], DEDECKER [14], DE DONDER [17] und WEYL [81] – ermöglicht es, für Lagrange-Dichten erster Ordnung den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen entsprechende Gleichungen aufzustellen, die De Donder-Weylschen Gleichungen, (3.42), die sich allerdings nicht als Entwicklungsgleichungen für einen Parameter – der Zeit – interpretieren lassen, sondern kovariant formuliert sind.



Mit den Arbeiten von GOLDSCHMIDT und STERNBERG, [29] und KIJOWSKI, SZCZYRBA und TULCZYJEW, [46, 47] wird der Begriff der symplektischen Mannigfaltigkeit erweitert, indem die symplektische  $2(= 1 + 1)$ -Form durch eine geschlossene, auf Vektorfeldern nicht ausgeartete  $(n + 1)$ -Form, multisymplektische Form  $\Omega$  genannt, ersetzt wird. Die durch die erwähnten kovarianten Impulse und eine zusätzliche Koordinate beschriebene Mannigfaltigkeit bietet ein Beispiel für eine derartige multisymplektische Mannigfaltigkeit. Sie entspricht dem doppelt erweiterten Phasenraum der zeitabhängigen Hamiltonschen Mechanik. Zentraler Gegenstand ist nun das Studium der Gleichung

$$X \lrcorner \Omega = dh, \quad (1.1)$$

in der wegen des hohen Formgrades der multisymplektischen Form  $\Omega$  auf der rechten Seite Formen  $h$  anstatt von Funktionen auftreten. KANATCHIKOV verallgemeinerte eine Variante dieser Gleichung auf den Fall, daß  $X$  ein Multivektorfeld bezeichnet. Wie wir in der vorliegenden Arbeit sehen werden, ist erst damit die algebraische Beschreibung der Lösungen der Feldgleichungen in Anlehnung an die Hamiltonschen Vektorfelder der Punktmechanik möglich.

Für einen Überblick über den gegenwärtigen Stand des multisymplektischen Formalismus verweisen wir auf [32, 12, 30].

In der vorliegenden Arbeit werden zwei neue **Ergebnisse** erzielt. Zum einen werden die von KANATCHIKOV eingeführten Hamiltonschen Multivektorfelder analysiert und es wird geprüft, inwieweit damit Lösungen der Feldgleichungen beschrieben werden können. Dazu wird zunächst eine Verbindung zwischen der bekannten Theorie der integrierbaren Distributionen (im Sinne von Unterbündeln des Tangentialbündels) und Multivektorfeldern hergestellt. Es zeigt sich, daß zerlegbare Multivektorfelder, die sich also als antisymmetrisches Tensorprodukt von Vektorfeldern beschreiben lassen, Distributionen erklären und umgekehrt. Sind die Lösungen einer betrachteten Feldgleichung Schnitte in einem Faserbündel über einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit, so hat man  $n$ -Vektorfelder zu deren Beschreibung heranzuziehen. Ein Blick auf die fundamentale Gleichung (1.1) lehrt – da  $\Omega$  eine  $(n + 1)$ -Form bezeichnet –, daß in diesem Fall  $h$  eine gewöhnliche Funktion auf dem Phasenraum sein muß. Es zeigt sich, daß Funktionen der Gestalt

$$h(x, v, \vec{p}, p) = -\mathcal{H}(x, v, \vec{p}) - p, \quad (1.2)$$

bei denen  $\mathcal{H}$  die aus der Lagrange-Dichte gewonnene De Donder-Weyl-Hamilton-Funktion darstellt, in der Tat Hamiltonsche  $n$ -Vektorfelder besitzen, die Distributionen auf dem Phasenraum beschreiben. Diese spezielle Form der Abhängigkeit läßt sich sogar geometrisch verstehen. Sie ergibt sich zwangsläufig, wenn man aus der Koordinatenfunktion  $\mathcal{H}$ , die bei Kartenwechsel ihre Gestalt ändert, ohne Zuhilfenahme eines Zusammenhangs eine Funktion gewinnen will.

Natürlich stellt sich für die so gefundenen Distributionen die Frage, ob sie auch integrierbar sind und damit Lösungen der Feldgleichungen beschreiben. Es zeigt sich, daß dies ohne zusätzliche Information nicht als allgemeine Aussage erreichbar ist. Wir benutzen die kovariante Version der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung, um ein Kriterium für die Integrierbarkeit anzugeben.

Als zweites Ergebnis wird eine Super-Poisson-Lie-Struktur konstruiert. Der Name leitet sich dabei aus der Analogie zur Hamiltonschen Mechanik ab, obwohl hier lediglich eine Klammeroperation mit Jacobi-Identität auftritt und kein Produkt existiert, das etwa eine Leibniz-Regel erfüllt.

Die Ähnlichkeit von (1.1) zur in der symplektischen Geometrie vorkommenden Relation legt nahe, Hamiltonsche Multivektorfelder zur Definition einer Klammeroperation zu verwenden. Der in der Literatur gewählte Ansatz erfüllt nun aber nicht die Jacobi-Identität, und es muß nach Korrekturterminen gesucht werden, die die gewünschte Eigenschaft herstellen. Dabei gilt es zu beachten, daß das Hamiltonsche Multivektorfeld zu einer Hamiltonschen Form nicht eindeutig gegeben ist. Daher

ist in diesem Korrekturausdruck mit Problemen der Wohldefiniertheit zu rechnen. Dem kann durch eine zusätzliche Einschränkung an die Hamiltonschen Formen Abhilfe geschaffen werden. Die so erhaltene Klasse der Poissonschen Formen besteht aus allen Hamiltonschen Formen, deren Kern als Unterraum der Multivektorfelder den der multisymplektischen Form  $\Omega$  beinhaltet. Der nun gefundene Ausdruck für die Poissonklammer,

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= -L_{X_f}g + (-)^{(|X_f|+1)(|X_g|+1)}L_{X_g}f + (-)^{|X_g|+1}L_{X_g \wedge X_f}\Theta \\ &= (-)^{|X_f|}X_f \lrcorner X_g \lrcorner \Omega + d \left( -X_f \lrcorner g + (-)^{(|X_f|+1)(|X_g|+1)}X_g \lrcorner f + (-)^{|X_g|+1}X_f \lrcorner X_g \lrcorner \Theta \right), \end{aligned} \quad (1.3)$$

wobei  $X_f$  und  $X_g$  jeweils zu  $f$  und  $g$  über die Beziehung (1.1) assoziiert sind und die Vorzeichen durch die Tensorgrade der Multivektorfelder bestimmt werden, ergibt wieder eine Poissonsche Form und erfüllt die Super-Jacobi-Identität. Dabei wurde benutzt, daß die multisymplektische Form  $\Omega$  ein Potential besitzt,  $\Omega = -d\Theta$ , eine Eigenschaft, die für beliebige Feldtheorien gegeben ist. Man kann sogar  $\Theta$  als das eigentliche, fundamentale Objekt ansehen ([76]).

Die Arbeit gliedert sich wie folgt. Im **zweiten Kapitel** wird die bekannte Lagrangesche Formulierung vorgestellt. Dabei wird die geometrische Struktur der Jetbündel eingeführt, die nötig ist, um die Definition des multisymplektischen Phasenraumes zu verstehen. Elemente des  $k$ -ten Jetbündels zu einem Faserbündel  $\mathcal{E}$  stellen Äquivalenzklassen von lokalen Schnitten von  $\mathcal{E}$  dar, wobei zwei Schnitte in einem Punkt  $k$ -äquivalent heißen, wenn sie in einem gegebenen Koordinatensystem (und folglich in allen anderen auch) in diesem Punkt in allen Ableitungen bis zur  $k$ -ten Ordnung übereinstimmen. Damit hat man eine Methode zur Hand, Ableitungen von Schnitten in nichttrivialen Faserbündeln zu betrachten, ohne einen Zusammenhang zu wählen. Die Jetbündel kann man als Verallgemeinerung des Tangentialbündels eines Konfigurationsraumes der klassischen Mechanik ansehen: Zum einen werden die Äquivalenzklassen von Kurven, die Tangentialvektoren beschreiben, durch Äquivalenzklassen von höherdimensionalen Objekten ersetzt und zum anderen berücksichtigt die Äquivalenzklassenbildung Ableitungen bis zur Ordnung  $k$ . Zum Schluß des Kapitels werden auf bekannte Weise aus dem Variationsprinzip für eine gegebene Lagrange-Dichte die Feldgleichung abgeleitet.

**Kapitel 3** wendet sich dem geometrischen Rahmen der multisymplektischen Feldtheorie zu. Ausgehend von der Interpretation des ersten Jetbündels  $\mathfrak{J}^1\mathcal{E}$  als Verallgemeinerung des Tangentialraumes an einen Konfigurationsraum definieren wir den multisymplektischen Phasenraum  $\mathcal{P}$  als einen dualen Raum zu  $\mathfrak{J}^1\mathcal{E}$ . Da aber letzterer über  $\mathcal{E}$  keine Vektorraumstruktur trägt, sondern lediglich einen affinen Raum darstellt, kommen für die Dualisierung nur affine Abbildungen in Betracht. Als Zielraum dieser Abbildungen wählen wir jeweils die entsprechende Faser des Volumenbündels  $\Lambda^n T^*\mathcal{M}$ . Mit dieser Vereinbarung ist es möglich, ohne Verwendung einer Volumenform auf  $\mathcal{M}$  eine kovariante Legendre-Transformation als Faserableitung der Lagrange-Dichte zu definieren. Es stellt sich heraus, daß zu jeder Feldvariable  $n$  konjugierte Impulse existieren. Für diese leiten wir aus den Euler-Lagrange-Gleichungen die für reguläre Lagrange-Dichten äquivalenten De Donder-Weyl-Gleichungen ab, die wir zur Interpretation spezieller Hamiltonscher  $n$ -Vektorfelder bereitstellen müssen. Da sich die Dimensionen des multisymplektischen Phasenraumes und des ersten Jetbündels aufgrund der affinen Struktur des letzteren um 1 unterscheiden, ist die kovariante Legendre-Transformation selbst im gutartigen Fall nicht surjektiv. Wir führen deshalb eine Mannigfaltigkeit  $\Pi$ , das Legendre-Bündel, ein, auf der die kovariante Legendre-Transformation für reguläre Lagrange-Dichten bijektiv ist. Da  $\Pi$  in KANATCHIKOVs Arbeiten eine zentrale Rolle spielt und wir im folgenden Kapitel dessen Formulierung in unseren Rahmen einbetten, schieben wir an dieser Stelle eine kurze Skizze der geometrischen Objekte dieses Zuganges ein.

Weiter ist es mit der Wahl des Zielraumes für die affinen Abbildungen, die die Punkte des multisym-

plektischen Phasenraumes  $\mathcal{P}$  ausmachen, möglich, die kanonische Form  $\Theta$  zu definieren. Mit

$$\Omega = -d\Theta \quad (1.4)$$

ist nun die multisymplektische Form gegeben, die im Fall der klassischen Mechanik mit der kanonischen symplektischen 2-Form auf dem doppelt erweiterten Phasenraum zusammenfällt. Die  $(n+1)$ -Form  $\Omega$  dient nun zur Definition der Hamiltonschen Formen  $h$  und Hamiltonschen Vektorfelder  $X$  nach Gleichung (1.1). Durch Abzählen der Grade erkennt man sofort, daß zu einer  $r$ -Form  $h$  ein  $(n-r)$ -Vektorfeld  $X$  gehört. Darüberhinaus kann aber nicht jede Form als Hamiltonsche Form dienen. Es stellt sich nämlich heraus, daß die Koeffizientenfunktionen eine sehr eingeschränkte Abhängigkeit von bestimmten Koordinaten aufweisen müssen. Dies wird exemplarisch an einer Unterklasse der Hamiltonschen Formen illustriert.

Für das Verständnis klassischer Feldtheorien ist die Einbettung infinitesimaler Symmetrioperationen essentiell. Wir zeigen, daß sich diese als Vektorfelder auf dem multisymplektischen Phasenraum  $\mathcal{P}$  beschreiben lassen, zu denen Hamiltonsche  $(n-1)$ -Formen gefunden werden können.

Mit diesen Vorarbeiten wenden wir uns nun dem Hauptresultat des Kapitels zu, der Analyse Hamiltonscher  $n$ -Vektorfelder. Zunächst geben wir einen Überblick über die Begriffe der Theorie der integrierbaren Distributionen als Unterräume des Tangentialbündels an eine Mannigfaltigkeit und stellen den Zusammenhang zu Multivektorfeldern her. Distributionen vom Rang  $n$  stehen in Korrespondenz zu zerlegbaren Multivektorfeldern gleichen Tensorgrades. Es liegt also nahe, Hamiltonsche  $n$ -Vektorfelder zu untersuchen, da wir ja Schnitte in  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$  zu beschreiben suchen. Es wird gezeigt, daß für Hamiltonfunktionen (1.2) zerlegbare Hamiltonsche  $n$ -Vektorfelder existieren, die genau die Tangentialräume an Lösungen der De Donder-Weylschen Gleichungen beschreiben. Diese Multivektorfelder sind allerdings nicht eindeutig bestimmt, weshalb sich die Umkehrung der Frage, nämlich ob die Distributionen auch integrierbar sind, nicht ohne weiteres allgemein positiv beantworten läßt. Durch Hinzunahme der bereits in [72] erwähnten kovarianten Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung lassen sich jedoch notwendige und hinreichende Kriterien angeben, unter denen die gewünschte Integrierbarkeit erreicht werden kann. Nach der Diskussion des freien Klein-Gordon-Feldes zur Illustration der erzielten Resultate wird der geometrische Charakter der kovarianten Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung erläutert.

Das **vierte Kapitel** ist den algebraischen Eigenschaften der multisymplektischen Formulierung gewidmet. Das Auftreten von Multivektorfeldern und Hamiltonschen Formen läßt gradierungsabhängige Vorzeichen erwarten, so daß zunächst ein Studium der Ausdehnung von Lie-Klammer und Lie-Ableitung auf Multivektorfelder notwendig ist. Dabei erhalten wir die erweiterte Super-Lie-Klammer – in der Literatur unter dem Namen Schouten-Klammer bekannt – durch die Forderung einer Super-Leibniz-Regel bezüglich des antisymmetrischen Tensorproduktes von Vektorfeldern. Die Vorzeichen ergeben sich dabei aus dem Abbildungsgrad von  $X \wedge \cdot$  und  $[X, \cdot]$ . Mit der ebenso zu fordernden Antisymmetrie der Schouten-Klammer kann eine Super-Jacobi-Identität für Multivektorfelder beliebigen Tensorgrades bewiesen werden.

In der symplektischen Mechanik läßt sich bekanntermaßen die Poisson-Klammer mit Hilfe der Lie-Ableitung definieren ([1]). Wir werden uns von dieser Vorgehensweise leiten lassen, um eine Poisson-Lie-Klammer für den hier betrachteten allgemeinen Fall aufzufinden. Dazu ist es nötig, den Begriff der Lie-Ableitung einer Form nach einem Vektorfeld auf Multivektorfelder auszudehnen. Mit der üblichen Definition der gewöhnlichen Lie-Ableitung als Kommutator des äußeren Differentials  $d$  und der Einsetzungsabbildung (Kontraktion) liegt diese Erweiterung auf der Hand. Wir wählen den Super-Kommutator beider Abbildungen, wobei im Falle der Einsetzungsabbildung das Vorzeichen durch den Tensorgrad des Multivektorfeldes bestimmt wird. Der Kommutator dieser Lie-Ableitung mit der Kontraktion ergibt eine Abbildung, die sich als Kontraktion mit einem Multivektorfeld auffassen läßt.

Wir definieren letzteres als Lie-Ableitung  $L_X Y$  eines Multivektorfeldes  $Y$  nach einem Multivektorfeld  $X$ . Obwohl  $L_X Y$  und  $[X, Y]$  vom Tensorgrade übereinstimmen, sind sie doch nicht gleich, sondern unterscheiden sich um ein Vorzeichen. Dies folgern wir aus Symmetrieüberlegungen und den Super-Leibniz-Regeln für beide Ausdrücke im zweiten Argument. Der erste Abschnitt schließt mit der Bereitstellung nützlicher Formeln, die im später folgenden Beweis der Super-Jacobi-Identität benötigt werden.

Mit diesem Werkzeug gerüstet, stellen wir nun die gefundene Poisson-Lie-Klammer vor. Sie stellt insofern eine Verallgemeinerung des symplektischen Falles dar, als dort alle abweichenden Terme wegen des zu geringen Formengrades der kanonischen Formen verschwinden. Interessant ist, daß die Definition wesentlich die Exaktheit der multisymplektischen Form  $\Omega$  benutzt. Die vorgestellte Klammeroperation kann als Erweiterung der von FORGER und RÖMER angegebenen Verknüpfung von  $(n - 1)$ -Formen angesehen werden. Die Korrekturterme stellen aber ein weiteres Problem, das der Wohldefiniertheit des Ausdruckes. Da zu jeder Hamiltonschen Form  $h$  nach (1.1) im allgemeinen mehrere Hamiltonsche Multivektorfelder  $X$  korrespondieren, dürfen nur Kontraktionen dieser Multivektorfelder mit  $\Omega$  auftreten, nicht aber Kontraktionen mit den Hamiltonschen Formen. Wir schränken uns daher auf solche Hamiltonsche Formen ein, deren Kern den Kern von  $\Omega$  enthält, die also bei Kontraktion mit Hamiltonschen Multivektorfeldern die erwähnte Unbestimmtheit nicht sehen. Dies führt auf den Begriff der Poissonschen Formen, für die wir einige Beispiele angeben. Der Begriff der Poissonschen Form stellt insofern eine Neuerung gegenüber dem der Hamiltonschen Form dar, als man im allgemeinen eine gegebene Form nicht um eine geschlossene abändern kann, um die gewünschte Eigenschaft des Kerns zu erreichen, wie die sich anschließende Betrachtung einer 1-Form auf der Sphäre  $S^3$  zeigt.

Nun sind wir in der Lage, für die wohldefinierte Super-Poisson-Lie-Klammer zu zeigen, daß die Verknüpfung zweier Poissonscher Formen wieder eine Poissonsche Form ergibt. Es folgt schließlich der Beweis der Super-Jacobi-Identität, das eigentliche Ziel dieses Kapitels. Der Nachweis vollzieht sich in zwei Stufen. Zum einen wird eine im vorigen Abschnitt berechnete Identität über den Super-Kommutator zweier Lie-Ableitungen benutzt, zum anderen die Super-Jacobi-Identität für Multivektorfelder in der Kontraktion mit  $\Theta$ .

Unter Verwendung von Zusammenhängen gelang es KANATCHIKOV, auf dem Legendre-Bündel, das man sich als Bild der Legendre-Transformation vorstellen kann, eine Super-Poisson-Lie-Klammer für eine gewisse Klasse von Formen zu konstruieren. Wir zeigen, daß es sich dabei um einen Unterraum der hier betrachteten Poissonschen Formen handelt, für den die beiden Definitionen zusammenfallen. Eine Zusammenhangswahl in  $\mathcal{E}$  ist damit nicht mehr nötig.

Zum Schluß des Kapitels findet sich eine Analyse alternativer Produkte. Ein Produkt wäre wünschenswert im Hinblick auf eine Quantentheorie. Es existiert aber bisher nur das von KANATCHIKOV aufgefundene Produkt  $\bullet$  für horizontale Poissonsche Formen, das eine Super-Leibniz-Regel erfüllt, deren Gradierung verschieden von der der Klammer-Operation ist. Wir zeigen, daß sich dieses Produkt nicht auf beliebige Poissonsche Formen ausdehnen läßt und daß wegen der speziellen Abhängigkeit der Koeffizientenfunktionen der Poissonschen Formen jedes alternative Produkt höchstens vom gleichen Grad wie  $\bullet$  sein darf.

Mit letzterer Beobachtung ergibt sich aber im Falle der symplektischen Mechanik nicht das bekannte punktweise Funktionenprodukt auf dem doppelt erweiterten Phasenraum. Eine Produktstruktur scheint also nicht auf natürlichem Wege erreichbar zu sein.

Das **fünfte Kapitel** stellt wieder den Zusammenhang zu der bekannten Formulierung einer Feldtheorie her. Es wird die kanonische symplektische Struktur auf dem Raum der Anfangsbedingungen erläutert und gezeigt, wie man die symplektische 2-Form dort mittels Rückzug und Integration der multisymplektischen Form erhält. Nach der Definition der Observablen als Funktionale auf dem (un-

endlichdimensionalen) Phasenraum wird die Verbindung zu den Hamiltonschen  $(n - 1)$ -Formen der multisymplektischen Formulierung und deren Hamiltonschen Vektorfeldern verdeutlicht. Im zweiten Teil geben wir zur Illustration ein bekanntes Resultat von GOTAY und MARSDEN wieder, daß eine neuartige, eindeutige Definition des Energie-Impuls-Tensors als Rückzug der zu den infinitesimalen Raum-Zeit-Transformationen gehörenden Hamiltonschen  $(n - 1)$ -Form vorschlägt. Diese Konstruktion paßt insofern in den hier vorgestellten Rahmen, als sie auf natürliche Weise die zu raum-zeitlichen infinitesimalen Transformationen gehörenden Hamiltonschen  $(n - 1)$ -Formen benutzt.

Im **sechsten Kapitel** skizzieren wir schließlich einige interessante Fragestellungen, die sich an die erzielten Ergebnisse anschließen. Dies sind im speziellen die direkte Behandlung Theorien höherer Ordnung, die Frage der Implementierung von Nebenbedingungen, die Einbindung der Produktstruktur der Hamiltonschen Formulierung und Vorschläge für Quantisierungsansätze.

Ein **Anhang** erklärt, wie sich Zusammenhänge in  $\mathcal{E}$  als Schnitte in dem affinen Bündel  $\mathfrak{J}^1\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  auffassen lassen. Damit wird eine Vektorraumstruktur in dem affinen Bündel  $\mathfrak{J}^1\mathcal{E}$  über  $\mathcal{E}$  induziert. Weiter wird die Konstruktion eines Zusammenhanges in  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$  aus einem Zusammenhang in  $T\mathcal{M}$  und einem in  $\mathcal{E}$  vorgestellt.

## Notationen

Das Symbol  $\lrcorner$  wird für die Kontraktion von Multivektorfeldern, d.h. Elementen der antisymmetrischen Tensoralgebra von Vektorfeldern, und Formen benutzt. Dabei soll gelten

$$\partial_{i_r} \wedge \cdots \wedge \partial_{i_1} \lrcorner (dz^{j_1} \wedge \cdots \wedge dz^{j_r}) = \varepsilon_{i_1 \cdots i_r}^{j_1 \cdots j_r}. \quad (1.5)$$

Darüberhinaus verwenden wir die Kurzschreibweisen

$$d^n x = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \quad d_{\mu_1 \cdots \mu_r} x = \partial_{\mu_r} \lrcorner \cdots \partial_{\mu_1} \lrcorner d^n x. \quad (1.6)$$

$|X|$  meint den Tensorgrad eines (homogenen) Multivektorfeldes, also schreiben wir zum Beispiel

$$X \in \Lambda^{|X|} \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \quad (1.7)$$

und ebenso verstehen wir unter  $|f|$  den Formengrad einer homogenen Form  $f$ . Ist mit  $\mathcal{B}$  ein Faserbündel über  $\mathcal{A}$  gegeben, so bezeichnet

$$\text{pr}_{\mathcal{AB}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A} \quad (1.8)$$

die zugehörige kanonische Projektion. Wir wollen das Symbol für den Rückzug von Bündeln weglassen, wenn keine Mißverständnisse möglich sind. So hat man beispielsweise

$$T\mathcal{A} \otimes T\mathcal{B} \quad (1.9)$$

als

$$\text{pr}_{\mathcal{AB}}^* (T\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{B}} T\mathcal{B} \quad (1.10)$$

zu lesen.



## Kapitel 2

# Lagrangesche Formulierung

*Die Lagrange-Dichte einer Feldtheorie  $k$ -ter Ordnung ist geometrisch eine  $n$ -Form auf dem  $k$ -ten Jetbündel. Das für die folgenden Kapitel interessante erste Jetbündel übernimmt die Rolle des Tangentialbündels einer geometrischen Formulierung der Punktmechanik. Aus dem Variationsprinzip für die gegebene Lagrange-Dichte werden zum Ende die Euler-Lagrange-Gleichungen hergeleitet.*

Die Formulierung jeder klassischen Feldtheorie beginnt mit der Definition der Felder. Diese sind im allgemeinen Fall Schnitte  $\varphi$  in einem Faserbündel  $\mathcal{E}$  mit  $N$ -dimensionaler typischer Faser  $\mathcal{F}$  über einer  $n$ -dimensionalen Basismannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ , die oft als Modell der Raum-Zeit dient. Wir werden im folgenden  $\mathcal{M}$  immer als orientierbar annehmen und denken uns eine Volumenform gewählt. Für die Überlegungen dieser Arbeit ist es nicht notwendig, daß die typische Faser  $\mathcal{F}$  die Struktur eines Vektorraumes trägt, auch wenn dies in Anwendungen oft der Fall ist. An manchen Punkten lassen sich jedoch für Vektorbündel weitergehende Aussagen treffen, auf die wir dann gesondert eingehen. Die Feldgleichungen für die Schnitte  $\varphi$  gewinnt man aus der Variation des Wirkungsfunktionals  $\mathcal{S}$ , welches wiederum durch die Angabe einer Lagrangefunktion  $L$  festgelegt wird. Das Wirkungsfunktional ist nämlich von der speziellen Form

$$\mathcal{S}[\varphi] = \int_{\mathcal{M}} L(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots) d^n x, \quad (2.1)$$

wobei  $\varphi'$  symbolisch die ersten Ableitungen des Feldes bezeichnet und die Auslassungspunkte für eventuell auftretende höhere Ableitungen stehen.

Obwohl im Wirkungsfunktional Ableitungen der Felder auftauchen, ist doch die Verwendung eines Zusammenhanges nicht nötig:  $\mathcal{L} = L d^n x$  ist eine Dichte auf dem  $k$ -ten Jetbündel zu  $\mathcal{E}$ , wenn  $L$  von den Ableitungen der Felder bis zur Ordnung  $k$  abhängt, und das Wirkungsfunktional ist das Integral über  $\mathcal{M}$  des Rückzugs von  $\mathcal{L}$  mit  $\varphi$ .

Die folgenden Abschnitte dieses Kapitels sollen einen kurzen Überblick über diese Struktur geben. Die geometrischen Grundlagen zu Jet-Strukturen finden sich in [75], die Ableitung der Euler-Lagrangeschen Gleichungen in [8] und schließlich Ausführungen zu Zusammenhängen in [49].

## 2.1 Jet-Strukturen

Die Fasern des  $k$ -ten Jetbündels werden über jedem Punkt  $\mathbf{m}$  in  $\mathcal{M}$  lokal von den Werten bis zur  $k$ -ten Ableitung eines jeden Schnittes  $\varphi$  in ebendiesem Punkt aufgespannt. Eine invariante Formulierung der Sammlung aller Ableitungen bis zur  $k$ -ten Ordnung besteht im Begriff der Jet-Verlängerung eines Schnittes, den wir nun einführen wollen.

**Definition 2.1.1** *Es sei  $\mathcal{E}$  ein Bündel über  $\mathcal{M}$ ,  $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$  ein Punkt in  $\mathcal{M}$  und  $\Gamma_{\mathbf{m}}(\mathcal{E})$  die Menge der lokalen Schnitte von  $\mathcal{E}$ , deren Definitionsbereich  $\mathbf{m}$  enthält. Zwei lokale Schnitte  $\varphi, \psi \in \Gamma_{\mathbf{m}}(\mathcal{E})$  heißen  $k$ -äquivalent in  $\mathbf{m}$ , wenn  $\varphi(\mathbf{m}) = \psi(\mathbf{m})$  und wenn in einer lokalen Trivialisierung  $(x^\mu, v^A)$  von  $\mathcal{E}$  um  $\varphi(\mathbf{m})$  für alle Multi-Indizes  $I$  der Ordnung  $|I| \leq k$  die folgende Gleichung gilt:*

$$\left. \frac{\partial^{|I|} \varphi^A}{\partial x^I} \right|_{\mathbf{m}} = \left. \frac{\partial^{|I|} \psi^A}{\partial x^I} \right|_{\mathbf{m}}. \quad (2.2)$$

Die Äquivalenzklasse aller zu  $\varphi$  in  $\mathbf{m}$   $k$ -äquivalenten Schnitte heiße  $k$ -Jet zu  $\varphi$  in  $\mathbf{m}$  und trage das Symbol  $j_{\mathbf{m}}^k \varphi$ .

Zu einem gegebenen (lokalen) Schnitt  $\varphi$  in  $\mathcal{E}$  heißt der induzierte (lokale) Schnitt

$$j^k \varphi : \mathcal{M} \ni \mathbf{m} \mapsto j_{\mathbf{m}}^k \varphi \in \mathfrak{J}^k \mathcal{E} \quad (2.3)$$

die  $k$ -te Jet-Verlängerung von  $\varphi$ .

Man überzeugt sich leicht, daß die Definition der  $k$ -Äquivalenz in einem Punkt nicht vom verwendeten Koordinatensystem abhängt.

**Definition 2.1.2** *Die  $k$ -te Jet-Mannigfaltigkeit zu  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$  ist die Menge*

$$\mathfrak{J}^k \mathcal{E} := \{ j_{\mathbf{m}}^k \varphi \mid \mathbf{m} \in \mathcal{M}, \varphi \in \Gamma_{\mathbf{m}}(\mathcal{E}) \}. \quad (2.4)$$

BEMERKUNGEN. SAUNDERS ([75]) verwendet die Notation  $J^k \pi$ , wobei  $\pi$  die kanonische Projektion von  $\mathcal{E}$  auf  $\mathcal{M}$  ist, da die Definition wesentlich vom Begriff des Schnittes und damit von dem der Projektion abhängt. Diese Schreibweise hat sich aber nicht als Standard durchgesetzt.

Wir betrachten den Spezialfall  $n = 1$ ,  $\mathcal{M} = \mathbb{R}$ . Da  $\mathcal{E}$  nun notwendig ein triviales Faserbündel ist, gilt  $\mathcal{E} = Q \times \mathbb{R}$ , wobei  $Q$  die typische Faser bezeichnet. Es sei  $\gamma$  ein lokaler Schnitt in  $\mathcal{E}$  und also eine Kurve in  $Q$ . Für jeden Punkt  $\mathbf{t}$  aus dem Definitionsbereich von  $\gamma$  erhalten wir den 1-Jet  $j_{\mathbf{t}}^1 \gamma$ , d.h. die Menge aller Kurven, deren erste Ableitungen in dem Punkt  $\gamma(\mathbf{t})$  übereinstimmen. Diese Äquivalenzklasse entspricht aber genau einem Tangentialvektor in diesem Punkt und umgekehrt. Wir schließen in diesem Fall

$$\mathfrak{J}^1(Q \times \mathbb{R}) \cong TQ \times \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Deutet man  $Q$  physikalisch als Konfigurationsraum eines mechanischen Systems, so ist das erste Jetbündel in diesem Fall der um die Zeitachse erweiterte Tangentialraum an  $Q$ .

$\mathfrak{J}^k \mathcal{E}$  läßt sich als Bündel über  $\mathfrak{J}^{k-1} \mathcal{E}$  und damit auch über  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{M}$  auffassen, wobei die Projektionen in der offensichtlichen Weise eingeführt werden. In den folgenden Kapiteln werden wir oft lokale Rechnungen durchführen, die die Verwendung von Trivialisierungen erfordern. Es zeigt sich nun, daß jede Koordinatenwahl in  $\mathcal{E}$  ein Koordinatensystem in  $\mathfrak{J}^k \mathcal{E}$  induziert.



**Definition 2.1.3** Es sei  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$  ein Bündel und  $(\mathcal{U}, \nu)$  ein angepaßtes Koordinatensystem von  $\mathcal{E}$ . Das induzierte System von Koordinaten  $(\mathcal{U}^k, \nu^k)$  auf  $\mathfrak{J}^k \mathcal{E}$  ist definiert durch

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^k &= \{j_{\mathbf{m}}^k \varphi \mid \varphi(\mathbf{m}) \in \mathcal{U}\}, \\ \nu^k &= (x^\mu, \nu^A, \nu_I^A), \end{aligned}$$

wobei  $x^\mu(j_{\mathbf{m}}^k \varphi) = x^\mu(\mathbf{m})$ ,  $\nu^A(j_{\mathbf{m}}^k \varphi) = \nu^A(\varphi(\mathbf{m})) = \varphi^A(\mathbf{m})$  und

$$\nu_I^A(j_{\mathbf{m}}^k \varphi) = \left. \frac{\partial^{|\mathcal{I}|} \varphi^A}{\partial x^{\mathcal{I}}} \right|_{\mathbf{m}} \quad (2.6)$$

für  $|\mathcal{I}| \leq k$ .

**Satz 2.1.4** Für jeden angepaßten Atlas  $(\mathcal{U}, \nu)$  von  $\mathcal{E}$  ist  $(\mathcal{U}^k, \nu^k)$  ein endlichdimensionaler glatter Atlas von  $\mathfrak{J}^k \mathcal{E}$ .

BEWEIS. Es sei hier auf SAUNDERS' Buch [75], prop. 6.2.5 verwiesen.  $\square$

BEMERKUNG. Auch wenn das  $k$ -te Jetbündel über die Jet-Verlängerungen  $j^k \varphi$  eingeführt wurde, ist doch längst nicht jeder Schnitt des Bündels  $\mathfrak{J}^k \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$  von dieser Art.

In dieser Arbeit wollen wir die kovariant Hamiltonsche Formulierung von Feldtheorien, deren Lagrangedichte nur von den Feldern und deren erster Ableitung abhängt, untersuchen. In vielen physikalischen Beispielen treten aber höhere Ableitungen, insbesondere solche zweiter Ordnung auf. Natürlich kann man die zweite Ableitung eines Schnittes als zweimalige erste Differentiation verstehen. Dies führt auf die Frage, wie das 2-Jetbündel  $\mathfrak{J}^2 \mathcal{E}$  mit dem ersten Jetbündel des ersten Jetbündels  $\mathfrak{J}^1 \mathcal{E}$ , also mit  $\mathfrak{J}^1 \mathfrak{J}^1 \mathcal{E}$ , verbunden ist. Wir betrachten wieder den allgemeinen Fall.

**Satz 2.1.5** Die Abbildung

$$\iota_{k,k-1} : \mathfrak{J}^k \mathcal{E} \ni j_{\mathbf{m}}^k \varphi \mapsto j_{\mathbf{m}}^1(j_{\mathbf{m}}^{k-1} \varphi) \in \mathfrak{J}^1(\mathfrak{J}^{k-1} \mathcal{E}) \quad (2.7)$$

ist injektiv aber nicht surjektiv.

BEWEIS. Zum Beweis vergleicht man die Darstellung beider Seiten in angepaßten Koordinaten (s. [75], 5.2.). Die fehlende Surjektivität liegt daran, daß – wie bereits erwähnt – nicht jeder Schnitt von  $\mathfrak{J}^1 \mathcal{E}$  von der Gestalt  $j^1 \varphi$  ist. Es muß nämlich nach dem Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit der Ableitungen gelten

$$\nu_{\dots i \dots j \dots}^A(j_{\mathbf{m}}^k \varphi) = \nu_{\dots j \dots i \dots}^A(j_{\mathbf{m}}^k \varphi). \quad (2.8)$$

Solche Schnitte in  $\mathfrak{J}^1(\mathfrak{J}^{k-1} \mathcal{E})$ , die im Bild von  $\iota_{k,k-1}$  liegen, heißen holonome Schnitte.  $\square$

Während das Bündel  $\mathcal{E}$  als das kovariante Analogon des erweiterten Konfigurationsraumes der klassischen Mechanik angesehen werden kann, kommt dem ersten Jetbündel  $\mathfrak{J}^1 \mathcal{E}$  wie bereits erwähnt die Rolle der kovarianten Verallgemeinerung des erweiterten Tangentialbündels zu. Es ergibt sich aber ein wesentlicher Unterschied. Im Gegensatz zur klassischen Mechanik trägt  $\mathfrak{J}^1 \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  keine Vektorraumstruktur, sondern nur die eines affinen Bündels. Dies kann man darauf zurückführen, daß kein natürlicher Ableitungsbegriff für Schnitte in  $\mathcal{E}$  existiert.

**Satz 2.1.6**  $\mathfrak{J}^1\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  ist ein auf dem Vektorbündel<sup>1</sup>

$$\mathfrak{V}\mathcal{E} \otimes T^*\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E} \quad (2.9)$$

modelliertes affines Bündel (wobei  $T^*\mathcal{M}$  auf  $\mathcal{E}$  zurückgezogen zu denken ist).

BEWEIS. Man überzeugt sich davon, daß zu jeder angepaßten Karte  $(\mathcal{U}, \nu)$  von  $\mathcal{M}$  die Abbildung

$$j_{\mathbf{m}}^1\varphi \mapsto (\varphi(\mathbf{m}), \nu_{\mu}^A(j_{\mathbf{m}}^1\varphi)) \quad (2.10)$$

eine affine lokale Trivialisierung liefert ([75], thm. 6.2.9).  $\square$

Es existiert eine interessante Verbindung zwischen in  $\mathcal{E}$  gegebenen Zusammenhängen und Abbildungen von  $\mathcal{E}$  nach  $\mathfrak{J}^1\mathcal{E}$ , für die wir auf den ersten Abschnitt des Anhangs, A.1, verweisen.

## 2.2 Variationsprinzip und Euler-Lagrange-Gleichung

Da die folgenden Kapitel der Vorstellung eines kovariant Hamiltonschen Formalismus für Feldtheorien erster Ordnung zum Thema haben, wollen wir uns bei der ohnehin gut bekannten ([8, 32, 47]) und hier nur der Vollständigkeit halber wiedergegebenen Herleitung der Feldgleichungen auf diesen Fall beschränken.

Weiterhin wollen wir nur glatte Abbildungen betrachten, da hier lediglich der geometrische Gehalt einer Feldtheorie Gegenstand der Betrachtung sein soll.

Das Wirkungsfunktional nimmt also auf jedem Schnitt  $\varphi$  den Wert

$$\mathcal{S}[\varphi] = \int_{\mathcal{M}} (j^1\varphi)^* \mathcal{L} \quad (2.11)$$

an. Die dynamisch zulässigen Felder sind nun genau die stationären Punkte von  $\mathcal{S}$ , wobei die betrachteten Variationen von  $\varphi$  1-Parametergruppen von Diffeomorphismen von  $\mathcal{E}$  sind, die entlang der Fasern von  $\mathcal{E}$  abbilden und auf Fasern außerhalb eines kompakten Gebietes in  $\mathcal{M}$  als Identität operieren.

Es sei  $\Phi_t$  eine solche Variation mit zugehörigem Vektorfeld  $\xi$  auf  $\mathcal{E}$ . Mit der Gleichung

$$\Phi_t(j_m^1\varphi) = j_m^1(\Phi_t \circ \varphi) \quad (2.12)$$

kann man die Gruppenaktion auf das Jetbündel heben. Die Forderung nach Stationarität besagt damit, daß für alle Variationen  $\Phi_t$  die folgende Gleichung gelten muß.

$$0 \stackrel{!}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{S}[\Phi_t \circ \varphi] = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_{\mathcal{M}} (\Phi_t j^1\varphi)^* \mathcal{L} = \int_{\mathcal{M}} (j^1\varphi)^* L_{\xi} \mathcal{L}, \quad (2.13)$$

wobei  $L_{\xi}$  die Lie-Ableitung nach dem zur Variation gehörigem Vektorfeld auf  $\mathfrak{J}^1\mathcal{E}$  bezeichnet. Spaltet man von der Lagrange-Dichte einen Volumenanteil ab,

$$\mathcal{L} = L d^n x, \quad (2.14)$$

---

<sup>1</sup> $\mathfrak{V}\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  bezeichnet hier das Vertikalbündel, welches in jedem Punkt von  $\mathcal{E}$  aus denjenigen Tangentialvektoren in  $T\mathcal{E}$  besteht, die im Kern der Tangentialprojektion  $T\text{pr}_{\mathcal{M}\mathcal{E}}$  liegen.

so ergibt sich nach einer partiellen Integration und mit dem Fundamentalsatz der Variationsrechnung die *Euler-Lagrange-Gleichung*

$$\frac{\partial L}{\partial v^A}(j^1\varphi(x)) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial L}{\partial v^\mu_A}(j^1\varphi(x)) \right) = 0. \quad (2.15)$$

Zum Abschluß dieses Kapitels seien noch zwei Bemerkungen über Lagrangedichten höherer Ordnung angefügt. Sei also  $\mathcal{L}$  eine  $n$ -Form auf  $\mathfrak{J}^k\mathcal{E}$ . Nun kann man versuchen,  $\mathcal{L}$  als Rückzug mit der Abbildung  $\iota_{k,k-1}$  aus Satz 2.1.5 einer erweiterten Lagrangedichte  $\mathcal{L}^{k,k-1}$  auf  $\mathfrak{J}^1(\mathfrak{J}^{k-1}\mathcal{E})$  darzustellen. Dies ist genauer in [76, 30] ausgeführt – hier sei nur erwähnt, daß die Prozedur zusätzliche Wahlfreiheit schafft. Als Beispiel seien der PALATINI-Formalismus ([8]) und ASHTEKARS Zugang zur Allgemeinen Relativitätstheorie genannt (für eine Einführung siehe [27]).

Andererseits kann man für Feldtheorien höherer Ordnung auch die Forderung nach Stationarität als Gleichungen an  $\mathcal{L}$  formulieren. Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten dann

$$\sum_{l=0}^k \sum_{|J|=l} (-1)^l \frac{d^{|J|}}{dx^J} \left( \frac{\partial L}{\partial v^A_J}(j^k\varphi) \right) = 0, \quad (2.16)$$

wobei die innere Summe über alle Indexkombinationen der Länge  $l$  verläuft.



## Kapitel 3

# Multisymplektische Geometrie

*In diesem Kapitel wollen wir die geometrischen Objekte, die zur Definition der algebraischen Struktur nötig sind, vorstellen und analysieren. Im einzelnen sind dies der multisymplektische Phasenraum und die darauf gegebenen kanonischen Formen, die kovariante Legendre-Transformation und die daraus abgeleiteten De Donder-Weylschen Gleichungen und die Begriffe Hamiltonsche Form und Hamiltonsches Multivektorfeld, welche eine Verallgemeinerung des Zusammenspiels von Hamiltonschem Vektorfeld und Hamiltonfunktion der klassischen Mechanik darstellen. In Analogie zu den Hamiltonschen Vektorfeldern, deren Integralkurven Lösungen der Bewegungsgleichungen ergeben, werden Hamiltonsche  $n$ -Vektorfelder untersucht, die Tangentialräume an die Lösungen der Feldgleichungen, nun höherdimensionale Objekte, darstellen. Die Frage nach der Integrierbarkeit solcher durch Tangentialräume gegebenen Distributionen führt schließlich auf die kovarianten Hamilton-Jacobischen Differentialgleichungen.*

### 3.1 Multisymplektische Phasenräume

#### 3.1.1 Definitionen

Im vorangegangenen Kapitel wurde dargelegt, daß das erste Jetbündel  $\mathfrak{J}^1\mathcal{E}$  zu einem Faserbündel  $\mathcal{E}$  über einer Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  als kovariante Verallgemeinerung des erweiterten Tangentialbündels der klassischen Mechanik angesehen werden kann.  $\mathfrak{J}^1\mathcal{E}$  – gesehen als Bündel über  $\mathcal{E}$  – ist aber kein Vektorbündel, sondern trägt lediglich eine affine Struktur. Der Grund ist darin zu sehen, daß von einem vorgelegten Schnitt in  $\mathcal{E}$  nicht in natürlicher Weise gesagt werden kann, ob er konstant ist.

Demzufolge ist es naheliegend, als kovariantes Pendant zum (doppelt erweiterten) Phasenraum die Menge aller affinen Abbildungen der Fasern von  $(\mathfrak{J}^1\mathcal{E}, \text{pr}_{\mathfrak{J}^1\mathcal{E}}, \mathcal{E})$  zu betrachten. Um auf dem entstehenden Raum eine der symplektischen 2-Form entsprechende Struktur zu erhalten, wählen wir als Zielraum der affinen Abbildungen nicht die reellen Zahlen, sondern die jeweilige Faser des Geradenbündels  $\Lambda^n T^*\mathcal{M}$ .

**Definition 3.1.1** Für jedes  $\mathbf{v} \in \mathcal{E}$  sei  $(\mathcal{P})_{\mathbf{v}}$  die Menge aller affinen Abbildungen der Faser  $(\mathfrak{J}^1\mathcal{E})_{\mathbf{v}}$  nach  $(\Lambda^n T^*\mathcal{M})_{\mathbf{m}}$ ,  $\mathbf{m} = \text{pr}_{\mathcal{M}\mathcal{E}}(\mathbf{v})$ .

Der multisymplektische Phasenraum  $\mathcal{P}$  ist das Bündel über  $\mathcal{E}$ , dessen Faser in  $\mathbf{v} \in \mathcal{E}$  durch  $(\mathcal{P})_{\mathbf{v}}$

gegeben ist,

$$\mathcal{P} = \bigcup_{\mathbf{v} \in \mathcal{E}} (\mathcal{P})_{\mathbf{v}}. \quad (3.1)$$

Nach den Ausführungen im vorigen Kapitel ist mit einem Satz lokaler Koordinaten  $(x^\mu, v^A)$  von  $\mathcal{E}$  eine Trivialisierung  $(x^\mu, v^A, v_\mu^A)$  gegeben, die auf Schnitten  $\varphi$  (bzw. deren Jet-Verlängerung  $j^1\varphi$ ) von  $\mathcal{E}$  die Eigenschaft

$$v_\mu^A(j^1\varphi) = \partial_\mu(v^A(\varphi)) \quad (3.2)$$

besitzt. Jedes Element  $\mathbf{p}$  in  $\mathcal{P}$ , also jede affine Abbildung von Fasern in  $\mathfrak{J}^1\mathcal{E}$  nach  $\Lambda^n T^*\mathcal{M}$ , ist damit durch einen Satz von Koordinaten  $(x^\mu, v^A, p_A^\mu, p)$  gegeben,

$$(x^\mu, v^A, p_A^\mu, p) : (J^1\mathcal{E})_{(x^\mu, v^A)} \ni (x^\mu, v^A, v_\mu^A) \mapsto (x^\mu, (p_B^\nu v_\nu^B + p)d^n x) \in (\Lambda^n T^*\mathcal{M})_{(x^\mu)}. \quad (3.3)$$

Diesen Satz wollen wir die von  $(x^\mu, v^A)$  induzierten lokalen Koordinaten von  $\mathcal{P}$  nennen. Wir schreiben für die Koordinaten  $p_A^\mu$  zusammenfassend  $\vec{p}$  und verwenden die kompakte Notation

$$(x^\mu, v^A, p_A^\mu, p) = (x, v, \vec{p}, p), \quad (3.4)$$

wann immer die Formellänge dies erforderlich macht. Für die partiellen Ableitungen in Richtung dieser Koordinaten wollen wir die folgende Schreibweise verwenden, wenn es die Komplexität der Formeln erfordert:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \partial_A = \frac{\partial}{\partial v^A}, \quad \partial_\mu^A = \frac{\partial}{\partial p_A^\mu}, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial p}. \quad (3.5)$$

Wieder wollen wir uns nun den Fall  $\mathcal{M} = \mathbb{R}$  anschauen. Dort hatten wir mit  $\mathcal{E} = \mathcal{Q} \times \mathbb{R}$  für das erste Jetbündel  $\mathfrak{J}^1\mathcal{E} \cong T\mathcal{Q} \times \mathbb{R}$  gefunden. Dies ist aber ein Vektorbündel über  $\mathcal{Q} \times \mathbb{R}$ , und wir können die affinen Abbildungen von  $\mathcal{P}$  in einen auf  $T\mathcal{Q}$  linearen und einen konstanten Anteil zerlegen. Mit einer Volumenform auf  $\mathbb{R}$  erhalten wir in diesem Fall

$$\mathcal{P} \cong (T^*\mathcal{Q} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \quad \text{für } \mathcal{M} = \mathbb{R}, \quad (3.6)$$

also stellt  $\mathcal{P}$  den doppelt erweiterten Phasenraum der zeitabhängigen Hamiltonschen Mechanik dar (vgl. z.B. [54]).

$\mathcal{P}$  erbt von  $\Lambda^n T^*\mathcal{M}$  die Struktur eines Vektorbündels über  $\mathcal{E}$ . Es bleibt zu untersuchen, wie sich die Koordinaten von  $\mathcal{P}$  nun unter einem Kartenwechsel von  $\mathcal{E}$

$$(x^\mu, v^A) \mapsto (x^\mu, \tilde{v}^A), \quad \tilde{v}^A(x, v) = v^A + \chi^A(x), \quad (3.7)$$

verhalten. Bekanntermaßen transformieren sich die Koordinaten  $(x^\mu, v^A, v_\mu^A)$  des ersten Jetbündels gemäß

$$(x^\mu, v^A, v_\mu^A) \mapsto (x^\mu, v^A + \chi^A(x), v_\mu^A + \partial_\mu \chi^A(x)). \quad (3.8)$$

Die Abbildung (3.7) induziert damit und mit der Rechnung

$$\begin{aligned} p_B^\nu v_\nu^B + p &= p_B^\nu (\tilde{v}_\nu^B - \partial_\nu \chi^B(x)) + p \\ &= \tilde{p}_B^\nu \tilde{v}_\nu^B + \tilde{p} \end{aligned} \quad (3.9)$$

einen Kartenwechsel der folgenden Gestalt

$$(x, v, \vec{p}, p) \mapsto (x, \tilde{v}, \vec{\tilde{p}}, \tilde{p}), \quad \tilde{p}_A^\mu = p_A^\mu, \quad \tilde{p} = p - p_B^\nu (\partial_\nu \chi^B)(x). \quad (3.10)$$

An der speziellen Form der Koordinatentransformation liest man nun ab, daß die Projektion

$$(x, v, \vec{p}, p) \mapsto (x, v, \vec{p}) \quad (3.11)$$

kanonisch ist ([64]). Der so entstehende Raum läßt sich unter Benutzung der affinen Struktur von  $\mathfrak{J}^1\mathcal{E}$  wie folgt charakterisieren.

**Definition 3.1.2** Für jedes  $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$  sei  $\tilde{\mathbf{p}}$  die lineare Abbildung

$$\tilde{\mathbf{p}} : (\mathfrak{A}\mathcal{E}) \otimes T^*\mathcal{M} \ni \tilde{\mathbf{v}} \mapsto \mathbf{p}(\tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}}) - \mathbf{p}(\tilde{\mathbf{v}}) \in \Lambda^n T^*\mathcal{M}, \quad (3.12)$$

wobei  $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathfrak{J}^1\mathcal{E}$  ein beliebiges Element ist, dessen Fußpunkt in  $\mathcal{E}$  mit dem von  $\mathbf{p}$  übereinstimmt.

Weiter sei  $\Pi \rightarrow \mathcal{E}$  das Bündel – im folgenden Legendre-Bündel genannt – aller derartigen Abbildungen  $\tilde{\mathbf{p}}$  und  $pr_{\Pi\mathcal{P}}$  die zu (3.12) gehörige Projektion  $\mathbf{p} \mapsto \tilde{\mathbf{p}}$  von  $\mathcal{P}$  auf  $\Pi$ .

**Lemma 3.1.3** Die Definition hängt nicht von der speziellen Wahl  $\gamma$  ab. Es gilt

$$\mathcal{P} \cong (\mathfrak{A}\mathcal{E})^* \otimes T\mathcal{M} \otimes \Lambda^n T^*\mathcal{M}, \quad (3.13)$$

wobei die Tensorprodukte über  $\mathcal{E}$  genommen sind.

Damit haben wir alle für die weitere Arbeit relevanten Bündel eingeführt. Zur Übersichtlichkeit seien diese hier noch einmal in einem Diagramm dargestellt.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{P} & \xleftarrow{\mathbb{F}\mathcal{L}} & \mathfrak{J}^1\mathcal{E} \\
 & \longleftarrow & \downarrow pr_{\mathcal{E}\mathcal{P}} & & \swarrow \\
 \Pi & & \mathcal{E} & & \\
 & \searrow & \downarrow & & \swarrow \\
 & & \mathcal{M} & & 
 \end{array} \quad (3.14)$$

Der multisymplektische Phasenraum  $\mathcal{P}$  läßt sich noch auf eine andere Weise charakterisieren, die sich bei der Definition kanonischer multisymplektischer Strukturen als nützlich erweisen wird.

**Satz 3.1.4** [[32], prop. 2.1]  $\mathcal{P}$  ist faserweise isomorph (als Vektorraum) zu dem Raum aller  $n$ -Formen auf  $\mathcal{E}$ , die bei Kontraktion mit zwei  $pr_{\mathcal{M}\mathcal{E}}$ -vertikalen Vektoren verschwinden. Mit anderen Worten, für jedes  $\mathbf{v}$  aus  $\mathcal{E}$  ist

$$(\mathcal{Z})_{\mathbf{v}} := \{\mathbf{z} \in \Lambda^n T^*\mathcal{E} \mid \xi \lrcorner \eta \lrcorner \mathbf{z} = 0 \forall \xi, \eta \in (\mathfrak{A}\mathcal{E})_{\mathbf{v}}\} \quad (3.15)$$

isomorph zu  $(\mathcal{P})_{\mathbf{v}}$ , es existiert also ein Bündelisomorphismus

$$\Phi : \overline{\mathfrak{Z}} \tilde{\mathcal{P}}, \quad (3.16)$$

wobei für  $\mathbf{z} \in (\mathcal{Z})_{\mathbf{v}}$  die Abbildung  $\Phi(\mathbf{z})$  gegeben ist durch

$$\Phi(\mathbf{z}) : \bar{\mathbf{v}} \mapsto (\bar{\mathbf{v}})^* \mathbf{z}_{\mathbf{v}} \quad (3.17)$$

für alle  $\bar{\mathbf{v}}$  aus der Faser  $(\mathcal{J}^1 \mathcal{E})_{\mathbf{v}}$ .

BEWEIS. Es sei  $\mathbf{z} \in (\mathcal{Z})_{\mathbf{v}}$  ein  $n$ -Kovektor wie im Satz beschrieben und  $\bar{\mathbf{v}} \in (\mathcal{J}^1 \mathcal{E})_{\mathbf{v}}$  ein Punkt in der Faser über  $\mathbf{v}$  des ersten Jetbündels. Mit  $\bar{\mathbf{v}}$  kann man  $\mathbf{z}$  zurückziehen auf  $\mathcal{M}$  und erhält einen  $n$ -Kovektor  $(\bar{\mathbf{v}})^* \mathbf{z}$ . Da  $\mathbf{z}$  höchstens einen  $\text{pr}_{\mathcal{M}\mathcal{E}}$ -vertikalen Formenanteil enthält, ist die Abbildung (3.17) affin. Weiterhin ist  $\Phi(\mathbf{z})$  eine fasertreue Abbildung und definiert also ein Element in  $\mathcal{P}$ . Die Zuordnung  $\mathbf{z} \mapsto \Phi(\mathbf{z})$  ist linear, und  $\Phi(\mathbf{z}) = 0$  genau dann, wenn  $(\bar{\mathbf{v}})^* \mathbf{z} = 0$  gilt für alle  $(\bar{\mathbf{v}})^* \mathbf{z}$ . Dann ist aber auch  $\mathbf{z} = 0$ . Folglich ist  $\Phi$  surjektiv. Die  $n$ -Formen auf  $\mathcal{E}$ , die bei Kontraktion mit zwei  $\text{pr}_{\mathcal{M}\mathcal{E}}$ -vertikalen Vektorfeldern verschwinden, spannen in jedem Punkt  $\mathbf{v}$  von  $\mathcal{E}$  einen  $Nn + 1$ -dimensionalen Raum  $(\mathcal{Z})_{\mathbf{v}}$  auf. Diese Dimension ist aber gleich der Dimension der Fasern von  $\mathcal{P}$  über  $\mathcal{E}$ . Also ist  $\Phi$  ein Isomorphismus von Vektorräumen.  $\square$

### 3.1.2 Kanonische multisymplektische Formen

Auf  $\mathcal{P}$  existiert in kanonischer Weise eine kovariante Verallgemeinerung der Konstruktion der kanonischen symplektischen Struktur des Kotangentialbündels der klassischen Mechanik.

**Definition 3.1.5** Die Poincaré-Cartan-Form  $\Theta \in \Omega^n(\mathcal{P})$  ist mit dem Isomorphismus  $\Phi$  aus Satz 3.1.4 punktweise gegeben durch

$$\Theta_{\Phi(\mathbf{z})}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \mathbf{z}(\eta_1, \dots, \eta_n), \quad \xi_i \in (T\mathcal{P})_{\Phi(\mathbf{z})}, \quad (3.18)$$

wobei  $\eta_i$  jeweils die Projektion des Tangentialvektors  $\xi_i$  auf  $\mathcal{E}$  bezeichnet.

In induzierten Koordinaten  $(x, v, \vec{p}, p)$  nimmt  $\Theta$  die Gestalt

$$\Theta_{(x,v,\vec{p},p)} = p_B^v dv^B \wedge d_v x + p d^n x \quad (3.19)$$

an. Offensichtlich verschwindet  $\Theta$  auf allen  $\text{pr}_{\mathcal{E}\mathcal{P}}$ -vertikalen Vektoren. Wir können damit etwas ungenau schreiben

$$\Theta_{(\Phi(\mathbf{z}))} = \mathbf{z}, \quad (3.20)$$

für alle  $\mathbf{z}$  aus  $\mathcal{Z}$ , da für die Kontraktion eines Tangentialvektors auf  $\mathcal{E}$  mit  $\Theta$  dessen Hebung nach  $\mathcal{P}$  erforderlich ist, das Ergebnis der Kontraktion aber nicht von der Wahl der Hebung abhängt.

Die  $n$ -Form  $\Theta$  kann somit auch benutzt werden, um das Inverse des Isomorphismus  $\Phi$  zu charakterisieren.

Im Falle  $n = 1$ ,  $\mathcal{M} = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{E} = \mathcal{Q} \times \mathbb{R}$  ist  $\Theta$  die kanonische Kontakt-1-Form  $p; dq^i + p dt$ , die bekanntlich ein Potential der symplektischen 2-Form auf dem doppelt erweiterten Phasenraum  $T^* \mathcal{Q} \times \mathbb{R}^2$  darstellt. Dies legt die folgende Vereinbarung nahe.

**Definition 3.1.6** Die multisymplektische  $(n + 1)$ -Form  $\Omega$  ist gegeben durch

$$\Omega = -d\Theta. \quad (3.21)$$



BEMERKUNG. Eine multisymplektische Mannigfaltigkeit ([30, 10])  $(\mathcal{M}, \omega)$  ist eine Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  mit einer geschlossenen Form  $\omega$ , für die die Abbildung

$$T\mathcal{M} \ni \xi \mapsto \xi \lrcorner \omega \in \Lambda^*(\mathcal{M}) \quad (3.22)$$

injektiv ist. In diesem Sinne ist  $(\mathcal{P}, \Omega)$  eine multisymplektische Mannigfaltigkeit, nicht aber im Sinne von MARTIN, ([57]). Dessen Definition, die eine Verallgemeinerung des Darboux'schen Theorems über die lokale Struktur einer symplektischen Mannigfaltigkeit erlaubt, fällt mit der hier aufgeführten nur für ganz spezielle typische Fasern  $\mathcal{F}$  des Faserbündels  $\mathcal{E}$  zusammen. Hier ist die multisymplektische Form dagegen zusätzlich exakt,  $\Omega = -d\Theta$ . Dies wird sich im folgenden Kapitel als sehr wesentlich erweisen.

### 3.1.3 Vertikale äußere Ableitung und multisymplektische Formen auf $\Pi$

Unter Verwendung von Zusammenhängen in  $\mathcal{E}$  und in  $T\mathcal{M}$  läßt sich auf dem Legendre-Bündel  $\Pi$  ebenfalls eine multisymplektische Form konstruieren. Obwohl die Konstruktion damit nicht-kanonisch ist, soll sie hier kurz skizziert werden, da mit ihrer Hilfe erstmalig die Definition einer multisymplektischen Poisson-Lie-Klammer gelang ([38]). Im folgenden Kapitel wird sich jedoch zeigen, daß sich die nun vorgestellte Formulierung als ein Spezialfall in den allgemeinen Rahmen der vorliegenden Arbeit einordnen läßt.

Zur Definition benötigen wir zunächst den Begriff der vertikalen äußeren Ableitung. Darunter versteht man – vereinfacht gesprochen – den Anteil der gegebenen äußeren Ableitung auf dem Totalraum eines Bündels, der nur die Ableitungen in Richtung der Fasern der kanonischen Projektion enthält. Äquivalent dazu kann man auch von einer Ausdehnung der Operation der auf den Fasern jeweils gegebenen äußeren Ableitung auf Formen über dem Totalraum sprechen. Das betrachtete Bündel ist in unserem Fall  $\Pi \rightarrow \mathcal{M}$ , und wir suchen zunächst eine Aufspaltung des Tangentialbündels  $T\Pi$  in einen vertikalen und einen horizontalen Anteil bezüglich der Projektion auf  $\mathcal{M}$ .

Eine solche ist bekanntermaßen durch einen Zusammenhang  $\bar{\Gamma}$  gegeben, der sich nach Abschnitt A.1 als eine Abbildung  $\bar{\Gamma} : \Pi \rightarrow \mathfrak{J}^1\Pi$  auffassen läßt.  $\bar{\Gamma}$  kann nun aus zwei Daten gewonnen werden ([48]): zum einen aus einem torsionsfreien Zusammenhang  $\Lambda$  im Tangentialbündel von  $\mathcal{M}$ , zum anderen aus einem Zusammenhang  $\Gamma$  in  $\mathcal{E}$ . Eine ausführliche Rechnung ([63], s. auch Anhang A.3) liefert den Koordinatenausdruck

$$\bar{\Gamma} : (x^\mu, v^A, p_A^\mu) = (x^\mu, v^A, p_A^\mu, \Gamma_\mu^A, [(\partial_A \Gamma_\mu^B) \delta_\sigma^v + \Lambda_{\mu\sigma}^v \delta_A^B - \Lambda_{\mu\rho}^\rho \delta_A^B \delta_\sigma^v] p_B^\sigma), \quad (3.23)$$

wobei die Koordinatenausdrücke der Zusammenhänge mit  $\Lambda_{\nu\sigma}^\mu$  beziehungsweise  $\Gamma_\mu^A$  bezeichnet wurden.

Mit  $\bar{\Gamma}$  haben wir nun eine Projektion  $j_{\bar{\Gamma}}$  des Tangentialbündels  $T\Pi$  auf das Vertikalbündel  $\mathfrak{V}\Pi$  zur Hand. Die umgekehrte Abbildung, das heißt die Einbettung von  $\mathfrak{V}\Pi$  in  $T\Pi$ , existiert dagegen kanonisch; sie sei mit  $i$  bezeichnet. Es gilt

$$j_{\bar{\Gamma}} \circ i = \text{id}_{\mathfrak{V}\Pi}. \quad (3.24)$$

Es sei nun  $\tilde{d}$  die äußere Ableitung auf einer Faser von  $\Pi$ . Da der Tangentialraum an eine solche Faser zu der Einschränkung des Vertikalbündels  $\mathfrak{V}\Pi$  auf ebendiese Faser isomorph ist, erhalten wir eine Abbildung  $d_{\bar{\Gamma}}$  auf der Algebra der Formen auf  $\Pi$  vermöge

$$d_{\bar{\Gamma}} := j_{\bar{\Gamma}}^* \circ \tilde{d} \circ i^*. \quad (3.25)$$

$d_{\bar{\Gamma}}$  besitzt folgende Eigenschaften:

**Lemma 3.1.7** *Es gilt  $d_{\bar{F}}^2 = 0$ . Ist darüberhinaus  $\mathcal{E}$  ein Vektorbündel, so sind  $d_{\bar{F}}$ -geschlossene Formen auf  $\Pi$  auch exakt.*

**Beweis.** Die erste Gleichung ergibt sich aus (3.24) und der Tatsache, daß  $\bar{d}^2$  verschwindet. Die zweite Eigenschaft ergibt sich aus dem Poincaré-Lemma für  $\bar{d}$ , da Abschneidefunktionen, die nur vom Fußpunkt auf  $\mathcal{M}$  abhängig sind, mit der Wirkung von  $d_{\bar{F}}$  vertauschen. Man kann somit über einer lokalen Überdeckung von  $\mathcal{M}$  das zu einer geschlossenen Form gehörige Potential faserweise konstruieren und die so berechneten Formen mit einer Zerlegung der Eins zusammenfügen.  $\square$

Mit  $d_{\bar{F}}$  sind wir nun in der Lage, die multisymplektische Form auf  $\Pi$  zu erklären. Dazu wollen wir benutzen, daß Punkte des Legendre-Bündels sich als Linearkombinationen von Elementen der Art  $\alpha \otimes \omega$  auffassen lassen, wobei  $\omega$  einen  $n$ -Kovektor auf  $\mathcal{M}$  darstellt,  $\omega \in \Lambda^n T^* \mathcal{M}$ , und  $\alpha \in (\mathfrak{A}\mathcal{E})^* \otimes T\mathcal{M}$  als lineare Abbildung zu interpretieren ist.

**Definition 3.1.8** *Es seien  $\xi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , Tangentialvektoren auf  $\Pi$  und  $\eta_i$  beziehungsweise  $\zeta_i$  deren Projektion auf  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{M}$ . Die  $n$ -Form  $\Theta_{\bar{F}}$  sei auf den separablen Elementen  $\alpha \otimes \omega$  von  $\Pi$ ,  $\alpha \in (\mathfrak{A}\mathcal{E})^* \otimes T\mathcal{M}$  und  $\omega \in \Lambda^n T^* \mathcal{M}$  erklärt durch*

$$\begin{aligned} (\Theta_{\bar{F}})_{(\alpha \otimes \omega)}(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ = \sum_{\sigma} \frac{(-1)^\sigma}{n!} \omega(\alpha(j_{\bar{F}}(\eta_{\sigma(1)})), \zeta_{\sigma(2)}, \dots, \zeta_{\sigma(n)}) \end{aligned} \quad (3.26)$$

– wobei die Summe über alle Permutationen verläuft – und auf den übrigen Elementen durch lineare Fortsetzung.

Die multisymplektische Form  $\Omega_{\bar{F}}$  ist gegeben durch

$$\Omega_{\bar{F}} = -d_{\bar{F}}\Theta_{\bar{F}}. \quad (3.27)$$

Man beachte, daß die Definition wohlgestellt ist, da  $\alpha$  und  $\omega$  in jedem Argument linear sind. Bezeichnet man die vermöge  $\bar{\Gamma}$  ausgezeichneten vertikalen Basis-Kovektoren in einer Trivialisierung mit  $e^A$  und  $e_A^\mu$ ,

$$\begin{aligned} e^A &= dv^A - \Gamma_\mu^A dx^\mu \\ e_A^\mu &= dp_A^\mu - p_B^\sigma (\delta_\sigma^\mu \partial_A \Gamma_\nu^B + \Lambda_{\nu\sigma}^\mu \delta_A^B - \delta_\sigma^\mu \Lambda_{\nu\rho}^B \delta_A^C) dx^\nu, \end{aligned} \quad (3.28)$$

so gilt

$$\begin{aligned} \Theta_{\bar{F}(x,v,p)} &= \frac{1}{(n-1)!} \varepsilon_{\mu\nu_1 \dots \nu_{n-1}} p_A^\mu e^A \wedge dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_{n-1}}, \\ \Omega_{\bar{F}(x,v,p)} &= \frac{1}{(n-1)!} \varepsilon_{\mu\nu_1 \dots \nu_{n-1}} e^A \wedge e_A^\mu \wedge dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_{n-1}} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \varepsilon_{\mu\nu_1 \dots \nu_{n-1}} dv^A \wedge dp_A^\mu \wedge dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_{n-1}} \\ &\quad - \Gamma_\mu^A dp_A^\mu \wedge d^n x - p_B^\mu \partial_A \Gamma_\mu^B dv^A \wedge d^n x \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \varepsilon_{\mu\nu_1 \dots \nu_{n-1}} dv^A \wedge dp_A^\mu \wedge dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_{n-1}} - d_{\bar{F}}(p_A^\mu \Gamma_\mu^A d^n x). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Man beachte, daß in  $\Omega_{\bar{F}}$  der  $\Lambda_{\mu\nu}^\sigma$ -Anteil wegen der Torsionsfreiheit von  $\Lambda$  verschwindet.

Das Legendre-Bündel  $\Pi \rightarrow \mathcal{E}$  wird auch in den Arbeiten von ECHEVERRÍA-ENRÍQUEZ et al. ([22]), GÜNTHER ([35]) und SARDANASHVILY ([73]) herangezogen. Die beiden letzten Autoren verwenden auf  $\Pi$  die vektorwertigen, kanonischen  $n$ -Formen

$$\tilde{\Theta} = p_A^\mu dv^A d^n x \otimes \partial_\mu, \quad \tilde{\Omega} = -dp_A^\mu dv^A d^n x \otimes \partial_\mu, \quad (3.30)$$

die sich unter Verwendung eines Zusammenhanges  $\Gamma$  und des Isomorphismus  $\Lambda^n T^* \mathcal{M} \otimes T\mathcal{M} \cong \Lambda^{n-1} T^* \mathcal{M}$  in die angegebenen Formen  $\Theta_{\bar{\Gamma}}$  und  $\Omega_{\bar{\Gamma}}$  überführen lassen. Die Wahl eines Zusammenhanges läßt sich auch in den erwähnten Arbeiten nicht vermeiden. Sie ist an späterer Stelle nötig bei der Definition Hamiltonscher Vektorfelder, die für den hier geschilderten Zugang weiter unten aufgeführt wird. ECHEVERRÍA-ENRÍQUEZ et al. benutzen dagegen

$$\Theta_h = p_A^\mu dv^A d_\mu x - \mathcal{H} d^n x, \quad (3.31)$$

was sich mit der weiter unten eingeführten De Donder-Weyl-Funktion  $\mathcal{H}$  als Einschränkung und Rückzug der kanonischen Form  $\Theta$  verstehen läßt.

## 3.2 Die kovariante Legendre-Transformation

In der klassischen Mechanik vollzieht sich der Übergang vom Lagrangeschen Extremalprinzip zu den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen über die Legendre-Transformation. Darunter versteht man einerseits die Konstruktion einer Hamiltonfunktion aus einer gegebenen Lagrangedichte, andererseits aber die Berechnung der kanonisch konjugierten Impulse aus den verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten. Geometrisch ist letzteres eine Abbildung vom Tangentialbündel in das Kotangentialbündel und wird definiert über die Taylor-Näherung erster Ordnung in Richtung der Fasern von  $\mathfrak{J}^1 \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  der Lagrangedichte  $\mathcal{L}$ .

**Definition 3.2.1** *Es sei mit  $\mathcal{L} : \mathfrak{J}^1 \mathcal{E} \rightarrow \Lambda^n T^* \mathcal{M}$  eine Lagrangedichte gegeben. Die zugehörige kovariante Legendre-Transformation  $\mathbb{F}\mathcal{L}$ ,*

$$\mathbb{F}\mathcal{L} : \mathfrak{J}^1 \mathcal{E} \ni \bar{\mathbf{v}} \mapsto \mathbb{F}\mathcal{L}(\bar{\mathbf{v}}) \in \mathcal{P}, \quad (3.32)$$

ist gegeben durch die affine Abbildung  $\mathbb{F}\mathcal{L}(\bar{\mathbf{v}})$ ,

$$\mathbb{F}\mathcal{L}(\bar{\mathbf{v}}) : \mathfrak{J}^1 \mathcal{E} \ni \bar{\mathbf{w}} \mapsto \mathcal{L}(\bar{\mathbf{v}}) + \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathcal{L}(\bar{\mathbf{v}} + \varepsilon(\bar{\mathbf{w}} - \bar{\mathbf{v}})), \quad (3.33)$$

wobei  $\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{w}} \in \mathfrak{J}^1 \mathcal{E}$  sind und der Ausdruck  $\varepsilon(\bar{\mathbf{w}} - \bar{\mathbf{v}})$  auf die affine Struktur von  $\mathfrak{J}^1 \mathcal{E}$  Bezug nimmt.

In Koordinaten findet man für  $\mathcal{L} = L d^n x$  die Formel

$$\mathbb{F}\mathcal{L} : (x^\mu, v^A, v_\mu^A) \mapsto (x^\mu, v^A, \frac{\partial L}{\partial v_\mu^A}, L - \frac{\partial L}{\partial v_\mu^A} v_\mu^A). \quad (3.34)$$

Dabei sind die Funktionen jeweils an den entsprechenden Argumenten auszuwerten. Ähnlich wie im Falle der klassischen Mechanik wird man die Beziehung

$$p_A^\mu = \frac{\partial L}{\partial v_\mu^A}(x^\mu, v^A, v_\mu^A) \quad (3.35)$$

nach den Koordinaten  $v_\mu^A$  aufzulösen suchen, um eine kovariante Version der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen zu erhalten. Dies ist aber nur möglich, wenn die Funktion  $L$  gewisse Regularitätseigenschaften erfüllt. In der Literatur ([21]) finden sich folgende Begriffsbildungen.

**Definition 3.2.2** *Eine Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  heißt regulär oder nicht entartet, wenn die Abbildung*

$$pr_{\Pi \mathcal{P}} \circ \mathbb{F}\mathcal{L} : \mathfrak{J}^1 \mathcal{E} \rightarrow \Pi \quad (3.36)$$

*ein lokaler Diffeomorphismus ist und hyper-regulär, wenn sie ein globaler Diffeomorphismus ist. Dabei ist  $pr_{\Pi \mathcal{P}}$  die kanonische Projektion im Sinne von (3.12).*

*Andernfalls heißt  $\mathcal{L}$  singulär.*

### 3.3 Die De Donder-Weyl-Gleichung als kovariante Hamiltonsche Bewegungsgleichung

Im folgenden Abschnitt wird eine kovariante Verallgemeinerung der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen hergeleitet werden, die (2.15) ersetzen soll. Die Vorgehensweise orientiert sich dabei eng an dem Beispiel der klassischen Mechanik. Mit Hilfe der Legendre-Transformation und der Definition einer neuen Funktion – der Hamilton-Funktion – erhält man einen Satz neuer Gleichungen, die zu denen aus dem Variationsprinzip gewonnenen äquivalent sind.

Es sei also  $\varphi$  ein Schnitt in  $\mathcal{E}$ , der die Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllt, und  $j^1\varphi$  seine Jet-Verlängerung. Transportiert man letztere mit der Legendre-Transformation  $\mathbb{F}\mathcal{L}$  nach  $\mathcal{P}$ , so erhält man in induzierten Koordinaten

$$p_A^\mu(x) = \frac{\partial L}{\partial v_A^\mu}(j^1\varphi(x)), \quad (3.37)$$

$$p(x) = L - \frac{\partial L}{\partial v_A^\mu}(j^1\varphi(x)) v_\mu^A(j^1\varphi(x)), \quad (3.38)$$

wobei natürlich

$$v_\mu^A(j^1\varphi(x)) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(v^A(j^1\varphi(x))) \quad (3.39)$$

gilt. Für reguläre Lagrange-Funktionen ist nun  $v_\mu^A$  ausdrückbar durch  $p_A^\mu$ ,  $v^A$  und  $x^\mu$ , so daß man für eine bestimmte Kombination der Ableitungen der Multiimpulskomponenten des Schnittes

$$(x^\mu, \varphi^A(x), p_A^\mu(x), p(x))$$

unter Ausnutzung der Euler-Lagrange-Gleichungen erhält

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} p_A^\mu(x) &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^\mu}(j^1\varphi(x)) \right) \\ &= \frac{\partial L}{\partial v^A}(j^1\varphi(x)). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Führt man nun noch die *De Donder-Weyl-Funktion*

$$\mathcal{H}(x, v, \vec{p}) = L - p_A^\mu \chi_\mu^A(x, v, \vec{p}) \quad (3.41)$$

ein, so ergeben sich die *De Donder-Weyl-Hamiltonschen Bewegungsgleichungen*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} p_A^\mu(x) &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v^A}(x, \varphi(x), \vec{p}(x)), \\ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi^A(x) &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_A^\mu}(x, \varphi(x), \vec{p}(x)). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Offensichtlich verallgemeinert dieser Satz von Differentialgleichungen die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen der Mechanik.

Streng genommen ist  $\mathcal{H}$  keine Funktion, sondern charakterisiert lokal das Bild der Legendre-Transformation als Schnitt in  $\mathcal{P} \rightarrow \Pi$ . Unter Verwendung eines Zusammenhanges in  $\Gamma$  lassen sich aber die Elemente von  $\mathcal{P}$ , die ja affine Abbildungen darstellen, in einen linearen und einen konstanten Anteil

zerlegen (s. Anhang A.2). Damit und mit einer Volumenform auf  $\mathcal{M}$  läßt sich aus  $\mathcal{H}$  die Funktion  $\mathcal{H}_\Gamma$  gewinnen. In lokalen Koordinaten findet man

$$\mathcal{H}_\Gamma(x, v, \vec{p}) = \mathcal{H}(x, v, \vec{p}) - p_A^\mu \Gamma_\mu^A(x, v). \quad (3.43)$$

Trägt  $\mathcal{E}$  die Struktur eines Vektorbündels, lohnt es sich, die De Donder-Weylschen Gleichungen (3.42) für  $\mathcal{H}_\Gamma$  aufzuschreiben. In diesem Fall gilt nämlich für die Koordinatenfunktionen des Zusammenhanges  $\Gamma$

$$\Gamma_\mu^A(x, v) = \Gamma_{\mu B}^A(x) v^B, \quad (3.44)$$

und man erhält

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} p_A^\mu(x) &= -\frac{\partial \mathcal{H}_\Gamma}{\partial v^A}(x, \varphi(x), \vec{p}(x)) + p_B^\mu(x) \frac{\partial \Gamma_\mu^B}{\partial v^A}, \\ &= -\frac{\partial \mathcal{H}_\Gamma}{\partial v^A}(x, \varphi(x), \vec{p}(x)) + p_B^\mu(x) \Gamma_{\mu A}^B, \\ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi^A(x) &= \frac{\partial \mathcal{H}_\Gamma}{\partial p_A^\mu}(x, \varphi(x), \vec{p}(x)) - \Gamma_{\mu B}^A \varphi^B(x). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Bringt man nun die  $\Gamma$ -Terme jeweils auf die linke Seite, so zeigt sich, daß in diesem Fall die partiellen Ableitungen in  $x$ -Richtung durch die entsprechenden kovarianten Ableitungen zu  $\Gamma$  zu ersetzen sind. (Für die Berechnung des Zusammenhanges in  $\mathcal{P}$  aus einem in  $\mathcal{E}$  konsultiere man den Anhang A.3. Die hier auftretende Summation über den Index  $\mu$  bewirkt, daß die in der kovarianten Ableitung zu  $\bar{\Gamma}$  nach (A.19) auftretenden Terme mit einem zu wählenden Zusammenhang  $\Lambda$  in  $T\mathcal{M}$  keinen Beitrag liefern.)

### 3.4 Hamiltonsche Formen und Multivektorfelder

Eine grundlegende Bedeutung kommt in der Hamiltonschen Formulierung der klassischen Mechanik der Beziehung von Hamiltonschen Vektorfeldern und deren Hamiltonfunktion zu. In diesem Abschnitt wollen wir die kovariante Verallgemeinerung dieses Begriffspaares studieren.

**Definition 3.4.1** Eine Form  $h$  auf  $\mathcal{P}$  heißt *Hamiltonsch*, wenn es ein Multivektorfeld  $X_h \in \Lambda^\bullet \mathfrak{X}(\mathcal{P})$  gibt, daß der Gleichung

$$X_h \lrcorner \Omega = dh \quad (3.46)$$

genügt.  $X_h$  heißt in diesem Falle *Hamiltonsches Multivektorfeld* zu  $h$ .

**BEMERKUNGEN.** Natürlich kann der Formengrad von  $h$  nur kleiner als  $n$  sein, da  $\Omega$  selbst eine  $(n+1)$ -Form ist. Weiter stellt man sofort fest, daß zu Hamiltonschen Formen  $h$  vom Grade  $|h|$  das korrespondierende Hamiltonsche Multivektorfeld vom Grade  $n - |h|$ , also ein  $(n - |h|)$ -Vektorfeld ist,  $X_h \in \Lambda^{n-|h|} \mathfrak{X}(\mathcal{P})$ . Die Korrespondenz von Hamiltonschen Formen und deren Multivektorfeldern ist keineswegs bijektiv; wie im Hamiltonschen Formalismus der klassischen Mechanik kann man auch hier zu einer gegebenen Form  $h$  eine geschlossene Form addieren, ohne Gleichung (3.46) zu verändern.

Neu ist dagegen, daß durch die Verwendung von Multivektorfeldern auch  $X_h$  auf der linken Seite nicht eindeutig bestimmt ist, es sei denn, daß  $h$  eine  $(n-1)$ -Form ist. Ein weiterer, einschneidender

Unterschied stellt sich heraus, wenn man untersucht, ob es überhaupt Paare  $(h, X_h)$  gibt, die (3.46) genügen. Es sind nämlich nicht alle Formen  $h$  auf der rechten Seite zulässig. Wir wollen dies an zwei Klassen von Hamiltonschen Formen im Detail belegen.

Dies gilt natürlich nicht für den Spezialfall  $n = 1$ ; wir hatten im vorangegangenen Abschnitt gesehen, daß dann  $\Omega$  die kanonische 2-Form auf dem doppelt erweiterten Phasenraum der zeitabhängigen Hamiltonschen Mechanik ist, und es ergeben sich keine Einschränkungen an erlaubte Funktionen  $h$ . Wir wollen im folgenden also immer  $n > 1$  voraussetzen.

Die Aussage des folgenden Satzes wurde zunächst unter Benutzung eines Zusammenhanges in  $\mathcal{E}$  für  $\text{pr}_{\mathcal{M}\Pi}$ -horizontale<sup>1</sup> Formen auf  $\Pi$  angegeben ([38]), ein ausführlicher Beweis findet sich in [63]. Wir wollen jedoch konsequent eine derartige Zusatzstruktur vermeiden und formulieren die folgende Aussage deshalb gleich auf dem erweiterten multisymplektischen Phasenraum  $\mathcal{P}$ .

**Satz 3.4.2** *Jede  $\text{pr}_{\mathcal{M}\mathcal{P}}$ -horizontale Hamiltonsche  $r$ -Form,  $r > 0$ ,  $h \in \Omega^r(\mathcal{P})$  nimmt in lokalen Koordinaten von  $\mathcal{P}$  die folgende Gestalt an:*

$$h(x, v, \vec{p}, p) = \frac{1}{(n-r)!} \sum_{k=0}^{n-r} p_{A_1}^{\mu_1} \cdots p_{A_k}^{\mu_k} h_{(x,v,p)}^{A_1 \cdots A_k \mu_{k+1} \cdots \mu_{n-r}} d_{\mu_1 \cdots \mu_{n-r}} x, \quad (3.47)$$

wobei die Koeffizientenfunktionen  $h_{(x,v)}^{A_1 \cdots A_k \mu_{k+1} \cdots \mu_{n-r}}$  antisymmetrisch in ihren Indizes sind.

Die Komponenten einer solchen  $r$ -Form sind also spezielle Polynome  $(n-r)$ -ten Grades in den Koordinaten  $p_A^\mu$ .

BEWEIS: Berechnet man in einem lokalen Koordinatensystem die durch die definierende Gleichung (3.46) eindeutig festgelegten Koeffizienten eines Hamiltonschen Multivektorfeldes  $X_h$ , so ergeben sich Bedingungen an die  $\vec{p}$ -Ableitungen der Koeffizientenfunktionen von  $h$ , die zu der oben angegebenen Gestalt führen.

Konkret verwenden wir für ein allgemeines Multivektorfeld  $X$  den Ansatz<sup>2</sup>

$$X = \frac{1}{(n-r)!} X^{\mu_1 \cdots \mu_{n-r}} \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_{n-r}} + \frac{1}{(n-r-1)!} X^{A \mu_1 \cdots \mu_{n-r-1}} \partial_A \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_{n-r-1}} \\ + \frac{1}{(n-r-1)!} X_A^{\nu \mu_1 \cdots \mu_{n-r-1}} \partial_\nu^A \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_{n-r-1}} + \frac{1}{(n-r-1)!} X_p^{\mu_1 \cdots \mu_{n-r-1}} \partial \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_{n-r-1}} + \cdots, \quad (3.48)$$

wobei die Punkte für die ausgelassenen Komponenten stehen, die wegen der speziellen Gestalt von  $\Omega$  nicht durch  $h$  bestimmt werden.

Horizontale Hamiltonsche  $r$ -Formen  $h$  können wir lokal schreiben als

$$h = \frac{1}{(n-r)!} h^{\mu_1 \cdots \mu_{n-1}} d_{\mu_1 \cdots \mu_{n-1}} x. \quad (3.49)$$

Aus der definierenden Gleichung (3.46) folgen unter anderem die Bedingungen

$$\frac{(-1)^{n-r-1}}{(n-r-1)!} X^{A \mu_1 \cdots \mu_{n-r-1}} \epsilon_{\nu \mu_1 \cdots \mu_{n-r-1} \sigma_1 \cdots \sigma_r} = \frac{1}{(n-r)!} \partial_\nu^A h^{\rho_1 \cdots \rho_{n-r}} \epsilon_{\rho_1 \cdots \rho_{n-r} \sigma_1 \cdots \sigma_r}. \quad (3.50)$$

(Die restlichen Bedingungen schränken nur die Koeffizienten von  $X$  ein, nicht aber die von  $h$ . Wir werden deshalb ihre Behandlung hier nicht aufführen.)

Die linke Seite von (3.50) verschwindet aber, wenn  $\mu$  mit einem der Indizes  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$  übereinstimmt. Demnach kann also die Koeffizientenfunktion  $h^{\rho_1 \cdots \rho_{n-r}}$  von  $h$  nur solche  $p_A^\nu$  enthalten, für die

<sup>1</sup>Darunter versteht man den Unterraum derjenigen Formen, die in jedem Punkt auf allen Tangentialvektoren aus dem Kern der angegebenen Projektion verschwinden.

<sup>2</sup>Für die Schreibweise lokaler Ausdrücke siehe die Vereinbarung (3.5).

$v$  in  $\{\rho_1, \dots, \rho_{n-r}\}$  enthalten ist.

Weiter ist  $X \lrcorner \Omega$  eine geschlossene Form, woraus man Forderungen an die Koeffizienten von  $X$  erhält, die sich auf  $h$  übertragen lassen. Da die Komponente mit zwei Anteilen der Art  $dp_A^\nu$  nur auf eine Weise in  $d(X \lrcorner \Omega)$  entstehen kann, findet man insbesondere

$$0 = \frac{1}{r!} \frac{1}{(n-r-1)!} \partial_\nu^A X^{B\nu_1 \dots \nu_{n-r-1}} \epsilon_{\mu\nu_1 \dots \nu_{n-r-1} \rho_1 \dots \rho_r} dp_A^\nu dp_B^\mu dx^{\rho_1} \dots dx^{\rho_r}. \quad (3.51)$$

Differenziert man nun die aus (3.50) folgende Gleichung (es wird nicht über  $\sigma_1$  summiert!)

$$\partial_{\sigma_1}^A h^{\sigma_1 \dots \sigma_{n-r}} = (-1)^{n-r-1} X^{A\sigma_2 \dots \sigma_{n-r}} \quad (3.52)$$

nach  $p_A^{\sigma_1}$ , so ergibt sich (wieder wird nicht über  $\sigma_1$  summiert!)

$$\partial_{\sigma_1}^A \partial_{\sigma_1}^A h^{\sigma_1 \dots \sigma_{n-r}} = (-1)^{n-r-1} \partial_{\sigma_1}^A X^{A\sigma_2 \dots \sigma_{n-r}}. \quad (3.53)$$

Aus Gleichung (3.51) folgt aber

$$0 = \frac{1}{(n-r-1)!} \partial_{\sigma_1}^A X^{A\sigma_2 \dots \sigma_{n-r}} \epsilon_{\mu_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-r} \sigma_1 \mu_2 \dots \mu_r}, \quad \sigma_1 \notin \{\mu_1, \dots, \mu_r\}. \quad (3.54)$$

Es verschwindet also die linke Seite von (3.53), woraus die behauptete  $p_A^\mu$ -Abhängigkeit gefolgert werden kann.  $\square$

Für die Hamiltonschen Funktionen, d.h. für die Formen vom Grade 0, ergeben sich keine Bedingungen.

Den folgenden Satz benötigen wir später für die Einbettung der von KANATCHIKOV gefundenen Gerstenhaber-Struktur in die allgemeine Formulierung.

**Satz 3.4.3** *Jede  $pr_{\mathcal{M}\mathcal{P}}$ -horizontale Hamiltonsche Form  $h \in \Omega^r(\mathcal{P})$  mit  $r > 0$  läßt sich als Rückzug einer Form  $\tilde{h}$  von  $\Pi$  mit der kanonischen Projektion darstellen,*

$$h = (pr_{\Pi\mathcal{P}})^* \tilde{h}. \quad (3.55)$$

*Jedes zu  $h$  assoziierte Hamiltonsche Multivektorfeld  $X_h$  ist darüberhinaus auf  $\Pi$  projizierbar und es gilt*

$$(Tpr_{\Pi\mathcal{P}})X_h \lrcorner \Omega_{\tilde{\Gamma}} = d_{\tilde{\Gamma}} \tilde{h} \quad (3.56)$$

für jeden Zusammenhang<sup>3</sup>  $\Gamma : \mathcal{E} \rightarrow \mathfrak{J}^1 \mathcal{E}$ .

*Genügen umgekehrt eine horizontale Form  $\tilde{h}$  auf  $\Pi$  und  $\tilde{X}$  ein Multivektorfeld auf  $\Pi$  der Gleichung*

$$\tilde{X} \lrcorner \Omega_{\tilde{\Gamma}} = d_{\tilde{\Gamma}} \tilde{h}, \quad (3.57)$$

*so ist  $pr_{\Pi\mathcal{P}}^* \tilde{h}$  eine Hamiltonsche Form auf  $\mathcal{P}$ .*

BEWEIS. Die erste Aussage erhält man aus der Beobachtung, daß die rechte Seite von (3.46) für horizontale Hamiltonsche Formen höchstens einen nicht-horizontalen Formenanteil besitzen kann. Bei der Kontraktion des rein horizontalen Anteils des zugehörigen Hamiltonschen Multivektorfeldes

<sup>3</sup>Für die Definition von  $\Omega_{\Gamma}$ ,  $d_{\Gamma}$  vergleiche Abschnitt 3.1.

$X_h$  mit  $\Omega$  auf der linken Seite der Gleichung entsteht jedoch ein Term, der  $dv^A \wedge dp_A^\mu \wedge \dots$  enthält – dieser muß also verschwinden. Es folgt

$$X^{\mu_1 \dots \mu_{n-r}} = 0, \quad \forall \mu_i = 1, \dots, n. \quad (3.58)$$

Demnach ist  $X_h$  vertikal, und es folgt, daß in der Kontraktion von  $X_h$  mit  $\Omega$  kein Anteil der Form  $dp \wedge \dots$  auftreten kann. Ein solcher würde sich aber ergeben, wenn die Koeffizientenfunktionen von  $h$  von der Koordinate  $p$  abhängen würden. Folglich ist  $h$  als Rückzug einer horizontalen Form auf  $\Pi$  darstellbar.

Dies zieht nach sich, daß die Koeffizientenfunktionen von  $X_h$  auch keine Funktion der Koordinate  $p$  sein können. Damit ist jedes  $X_h$  auf  $\Pi$  projizierbar. Bei der Projektion geht die Komponente

$$\frac{1}{(n-r-1)!} X^{\mu_1 \dots \mu_{n-r-1}} \partial \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{n-r-1}} \quad (3.59)$$

verloren. Diese ist jedoch in der Kontraktion mit  $\Omega$  gerade mit dem Anteil von  $dh$ , der horizontal ist, gleichzusetzen. In  $d_\Gamma \tilde{h}$  tritt dieser Anteil aber nicht auf. Ein Vergleich der übrigen Komponentenbeiträge zeigt, daß  $T\text{pr}_{\Pi\mathcal{P}}$  die angegebene Gleichung erfüllt.

Zum Beweis der letzten Aussage seien  $\tilde{h}$  und  $\tilde{X}$  wie im Satz gegeben. Wir konstruieren nun ein Hamiltonsches Multivektorfeld  $X$  auf  $\mathcal{P}$ , das zu  $\text{pr}_{\Pi\mathcal{P}}^* \tilde{h}$  gehört. Vergleicht man dazu  $\text{pr}_{\Pi\mathcal{P}}^*(d_\Gamma \tilde{h})$  mit  $d(\text{pr}_{\Pi\mathcal{P}}^* h)$  – wobei überall  $e^A$  und  $e_A^\mu$  durch  $dv^A$  beziehungsweise  $dp_A^\mu$  zu ersetzen sind, denn die einen treten in  $\Omega_\Gamma$ , die anderen in  $\Omega$  auf – so liegt der einzige Unterschied in den  $x^\mu$ -Ableitungen der äußeren Ableitung  $d$  auf  $\mathcal{P}$ . Diese ergeben einen Zusatzbeitrag in  $d(\text{pr}_{\Pi\mathcal{P}}^* h)$ , der sich durch die Kontraktion von

$$\frac{1}{r!} X^{\mu_1 \dots \mu_{r-1}} \partial \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{r-1}} \quad (3.60)$$

mit dem Anteil  $dp d^\mu x$  in  $\Omega$  kompensieren läßt. Die übrigen Bestimmungsgleichungen lassen sich übertragen, und die rein horizontale Komponente (in einem gewählten Koordinatensystem) muß verschwinden, da  $\text{pr}_{\Pi\mathcal{P}}^* \tilde{h}$  nicht von  $p$  abhängt. Diese lokale Argumentation ergibt ein globales Multivektorfeld  $X$ , wenn  $\tilde{X}$  global gegeben war.  $\square$

BEMERKUNG. Die Gleichung

$$X_h \lrcorner \Omega_\Gamma = d_\Gamma h \quad (3.61)$$

ist der Ausgangspunkt der Arbeiten von KANATCHIKOV ([38, 39]). Die Konstruktion der verwendeten Elemente verlangte jedoch die Auszeichnung eines Zusammenhangs in  $\mathcal{E}$ , vgl. Abschnitt 3.1 und [64]. Motivation war – wie in Kapitel 4 näher ausgeführt wird – den Defekt in der Jacobi-Identität einer naiv definierten Poisson-Lie-Klammer zu beseitigen. Überraschenderweise zeigte sich, daß die Konstruktion der Klammer am Ende nicht von  $\Gamma$  abhängt. Dies und die Ausführungen in Abschnitt (3.6), in dem wir spezielle Hamiltonsche 0-Formen verwenden werden, die *nicht* Rückzug einer Funktion auf  $\Pi$  sind, zeigt, daß der erweiterte multisymplektische Phasenraum das angemessenere Objekt ist.

Natürlich kann man diese Analyse auf beliebige Formen ausdehnen, jedoch sind diese für das weitere nicht von Interesse. Vielmehr wollen wir als zweites Beispiel gewisse Hamiltonsche Formen vom Grade  $(n-1)$  untersuchen.

**Satz 3.4.4** *Es sei  $h \in \Omega^{n-1}(\mathcal{P})$  eine Hamiltonsche  $(n-1)$ -Form,  $n > 1$ . Verschwindet die Kontraktion von  $h$  mit jedem beliebigen Multivektorfeld aus dem Kern von  $\Omega$ , so ist das eindeutig existierende zugehörige Hamiltonsche Vektorfeld  $\xi_h$  sowohl auf  $\mathcal{M}$  als auch auf  $\mathcal{E}$  projizierbar.*



BEMERKUNGEN. Das Resultat der Projektion auf  $\mathcal{E}$  derartiger Vektorfelder läßt sich als infinitesimale Symmetrietransformation auf  $\mathcal{E}$ , die eine Transformation auf  $\mathcal{M}$  überlagert, interpretieren. Im folgenden Abschnitt wird dargelegt, daß sich derartige Vektorfelder auf  $\mathcal{E}$  kanonisch auf  $\mathcal{P}$  heben lassen.

Die Aussage des Satzes gilt nicht im Fall  $n = 1$ : dort fallen die  $(n - 1)$ -Formen mit den Funktionen zusammen, an die wiederum keine einschränkenden Bedingungen formuliert werden können.

Die spezielle Form des Kerns der betrachteten Hamiltonschen Formen wird im nächsten Kapitel bei der Definition einer Poisson-Lie-Klammer eine wichtige Rolle spielen.

BEWEIS DES SATZES. Die explizite Berechnung der Koeffizienten von  $X_h$  in einem gewählten Koordinatensystem führt wieder auf Beziehungen zwischen den Komponenten von  $h$ , die das Verschwinden der relevanten, vertikalen Ableitungen der horizontalen Anteile von  $\xi_h$  nach sich ziehen. Damit ist  $\xi_h$  projizierbar entlang der jeweiligen Faser (über  $\mathcal{E}$  oder  $\mathcal{M}$ ), denn das Ergebnis der Projektion hängt nicht vom Fußpunkt in der Faser ab.

Der allgemeinste Ansatz für  $h$ ,

$$h = \alpha^\mu d_{\mu x} + \frac{1}{2} \beta_A^{\mu_1 \mu_2} dV^A d_{\mu_1 \mu_2 x} + \frac{1}{2} \beta_V^{A \mu_1 \mu_2} dP_A^V d_{\mu_1 \mu_2 x} + \frac{1}{2} \beta^{\mu_1 \mu_2} dp d_{\mu_1 \mu_2 x} + \frac{1}{2} \gamma^{\mu_1 \mu_2} dV^A dP_A^V d_{\mu_1 \mu_2 x}, \quad (3.62)$$

mit Koeffizientenfunktionen  $\alpha$ ,  $\beta_A^{\mu_1 \mu_2}$ ,  $\beta_V^{A \mu_1 \mu_2}$ ,  $\beta^{\mu_1 \mu_2}$  und  $\gamma^{\mu_1 \mu_2}$ , führt bei Auswertung der definierenden Relation  $\xi_h \lrcorner \Omega = dh$  zunächst auf

$$\partial_A \beta_B^{\mu_1 \mu_2} = \partial_B \beta_A^{\mu_1 \mu_2}, \quad (3.63)$$

$$\partial_V^A \beta_\rho^{B \mu_1 \mu_2} = \partial_\rho^B \beta_V^{A \mu_1 \mu_2}, \quad (3.64)$$

$$\partial_\rho^B \beta_\rho^{A \mu_1 \mu_2} = \partial_\rho^A \beta^{\mu_1 \mu_2}, \quad (3.65)$$

$$\partial \beta_A^{\mu_1 \mu_2} = \partial_A \beta^{\mu_1 \mu_2}, \quad (3.66)$$

für alle erlaubten Indexkombinationen, da  $\Omega$  keine Beiträge der Form  $dV^A dV^B d_{\mu x}$  und  $dP_A^V dP_B^V d_{\mu x}$  enthält. Weiter erhält man

$$0 = \partial \gamma^{\mu_1 \mu_2} = \partial_V^A \gamma^{\mu_1 \mu_2} = \partial_A \gamma^{\mu_1 \mu_2}, \quad (3.67)$$

wieder weil in  $\xi_h \lrcorner \Omega$  bestimmt Anteile von  $dh$  von vornherein nicht auftreten.

Setzt man nun den allgemeinsten Ansatz für  $\xi_h$ ,

$$\xi_h = X^\mu \partial_\mu + \xi^A \partial_A + \xi_A^V \partial_V^A + \xi_0 \partial \quad (3.68)$$

in die Gleichung (3.46) ein, so führt ein Vergleich der Koeffizienten vor  $dP_A^V dV^B d_{\mu_1 \mu_2 x}$  auf

$$\begin{aligned} \delta_B^A \xi^\mu \varepsilon_{\nu \mu \sigma_1 \dots \sigma_{n-2}} &= \frac{1}{2} \left( \partial_V^A \beta_B^{\rho_1 \rho_2} - \partial_B \beta_V^{A \rho_1 \rho_2} \right) \varepsilon_{\rho_1 \rho_2 \sigma_1 \dots \sigma_{n-2}} \\ &+ \partial_\rho \gamma^{\mu \rho} \varepsilon_{\nu \mu \sigma_1 \dots \sigma_{n-2}} + \frac{1}{2} \partial_V \gamma^{\mu_1 \mu_2} \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \sigma_1 \dots \sigma_{n-2}}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Für  $A \neq B$  erhält man damit

$$\partial_V^A \beta_B^{\rho_1 \rho_2} - \partial_B \beta_V^{A \rho_1 \rho_2} + \dots = 0, \quad A \neq B, \quad (3.70)$$

wobei die Auslassungspunkte für die Terme stehen, die  $\gamma$  enthalten. Diese hängen nur von den Koordinaten  $x^\mu$  ab. Differenziert man nun die Gleichung (3.69) für  $A = B$  nach  $v^C$ , so folgt für  $A \neq C$

$$\begin{aligned}\partial_C \xi^\mu \varepsilon_{\nu\mu\sigma_1 \dots \sigma_{n-2}} &= \frac{1}{2} \left( \partial_C \partial_\nu^A \beta_B^{\rho_1 \rho_2} - \partial_C \partial_B \beta_\nu^{A \rho_1 \rho_2} \right) \varepsilon_{\rho_1 \rho_2 \sigma_1 \dots \sigma_{n-2}} \\ &= \frac{1}{2} \left( \partial_B \partial_\nu^A \beta_C^{\rho_1 \rho_2} - \partial_C \partial_B \beta_\nu^{A \rho_1 \rho_2} \right) \varepsilon_{\rho_1 \rho_2 \sigma_1 \dots \sigma_{n-2}} \\ &= \frac{1}{2} \left( \partial_B \partial_C \beta_A^{\nu \rho_1 \rho_2} - \partial_C \partial_B \beta_\nu^{A \rho_1 \rho_2} \right) \varepsilon_{\rho_1 \rho_2 \sigma_1 \dots \sigma_{n-2}} \\ &= 0.\end{aligned}\tag{3.71}$$

In der zweiten Zeile wurde (3.63) verwendet, im anschließenden Schritt die nach  $v^B$  differenzierte Gleichung (3.70).

Ebenso erhält man

$$\partial_\nu^A \xi^\mu \varepsilon_{\nu\mu\sigma_1 \dots \sigma_{n-2}} = 0\tag{3.72}$$

und, mit einem ähnlichen Rechenweg,

$$\begin{aligned}\partial \xi^\mu \varepsilon_{\nu\mu\sigma_1 \dots \sigma_{n-2}} &= \frac{1}{2} \left( \partial \partial_\nu^A \beta_A^{\rho_1 \rho_2} - \partial \partial_A \beta_\nu^{A \rho_1 \rho_2} \right) \varepsilon_{\rho_1 \rho_2 \sigma_1 \dots \sigma_{n-2}} \\ &= \frac{1}{2} \left( \partial_A \partial_\nu^A \beta^{\rho_1 \rho_2} - \partial_\nu^A \partial_A \beta^{\rho_1 \rho_2} \right) \varepsilon_{\rho_1 \rho_2 \sigma_1 \dots \sigma_{n-2}} \\ &= 0.\end{aligned}\tag{3.73}$$

Zusammenfassend halten wir also fest, daß die Koeffizientenfunktionen  $\xi^\mu$  von  $\xi_h$  nur von der Koordinate auf  $\mathcal{M}$  abhängen. Damit ist  $\xi_h$  auf  $\mathcal{M}$  projizierbar.

Gleichheit der Koeffizienten zu  $dp_A^\nu d_\mu x$  zieht

$$-\xi^A \delta_\nu^\mu = \partial_\nu^A \alpha^\mu - \partial_\rho \beta_\nu^{A \mu \rho}\tag{3.74}$$

nach sich. Für  $\mu \neq \nu$  gilt demnach

$$\partial_\nu^A \alpha^\mu = \partial_\rho \beta_\nu^{A \mu \rho}, \quad \mu \neq \nu,\tag{3.75}$$

und man berechnet analog zur vorherigen Argumentationskette

$$\begin{aligned}\partial_\sigma^B \xi^A &= \partial_\sigma^B \partial_\mu^A \alpha^\mu - \partial_\sigma^B \partial_\rho \beta_\mu^{A \mu \rho} \quad (\text{keine Summation über } \mu!) \\ &= \partial_\sigma^B \partial_\mu^A \alpha^\mu - \partial_\mu^A \partial_\rho \beta_\sigma^{B \mu \rho} \\ &= \partial_\sigma^B \partial_\mu^A \alpha^\mu - \partial_\mu^A \partial_\sigma^B \alpha^\mu \\ &= 0.\end{aligned}\tag{3.76}$$

Es bleibt, die Abhängigkeit der Koeffizientenfunktion  $\xi^A$  von der Koordinate  $p$  zu untersuchen. Dazu betrachten wir das Ergebnis des  $\xi^\mu \partial_\mu$ -Anteils von  $\xi_h$  mit dem Anteil  $dp \wedge d^n x$  von  $\Omega$  und vergleichen dies mit dem entsprechenden Anteil von  $dh$  auf der rechten Seite. Man erhält

$$\xi^\mu dp d_\mu x = \partial \alpha^\mu dp d_\mu x - \partial_\sigma \beta^{\mu \sigma} dp d_\mu x.\tag{3.77}$$

Wir wissen aber bereits, daß  $\xi^\mu$  nicht von  $p_A^\nu$  abhängt, also ergibt die Differentiation beider Seiten in diese Richtung

$$\begin{aligned}0 &= \partial \partial_\nu^A \alpha^\mu dp d_\mu x - \partial_\sigma \partial_\nu^A \beta^{\mu \sigma} dp d_\mu x \\ &= \partial \left( \partial_\nu^A \alpha^\mu dp d_\mu x - \partial_\sigma \beta_\nu^{A \mu \sigma} dp d_\mu x \right) \\ &= -\partial(\xi^A \delta_\nu^\mu).\end{aligned}\tag{3.78}$$

Im ersten Schritt haben wir (3.65) benutzt und danach (3.74).  $\xi_h$  läßt sich folglich auch auf  $\mathcal{E}$  projizieren.  $\square$

### 3.5 Kovariante Impulsabbildungen

Besondere Bedeutung kommt bei der Formulierung einer Feldtheorie denjenigen Diffeomorphismen des Faserbündels  $\mathcal{E}$  zu, die einen Diffeomorphismus auf  $\mathcal{M}$  überlagern. Es existiert nun eine kanonische Weise, diese Transformationen nach  $\mathcal{P}$  zu heben ([32]). Es sei dazu  $\eta_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  ein solcher Diffeomorphismus,  $\eta_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  seine Projektion auf  $\mathcal{M}$ . Weiter sei  $\eta_{\mathfrak{J}^1\mathcal{E}} : \mathfrak{J}^1\mathcal{E} \rightarrow \mathfrak{J}^1\mathcal{E}$  die erste Jet-Verlängerung von  $\eta_{\mathcal{E}}$ , definiert über

$$\eta_{\mathfrak{J}^1\mathcal{E}}(J_{\mathbf{m}}^1\varphi) = J_{\eta_{\mathcal{M}}(\mathbf{m})}^1(\eta_{\mathcal{E}} \circ \varphi). \quad (3.79)$$

Die Transformation  $\eta_{\mathcal{P}}$  sei nun für jedes  $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$  gegeben durch die Abbildung

$$\eta_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) : (\mathfrak{J}^1\mathcal{E})_{\eta_{\mathcal{E}}(\mathbf{v})} \ni \bar{\mathbf{v}} \mapsto (\eta_{\mathcal{M}}^{-1})^* \left( \mathbf{p}(\eta_{\mathfrak{J}^1\mathcal{E}}^{-1}(\bar{\mathbf{v}})) \right) \in \Lambda^n T_{\eta_{\mathcal{M}}(\mathbf{m})}^* \mathcal{M}. \quad (3.80)$$

Unter Verwendung des Isomorphismus  $\Phi$ , (3.17), der zwischen  $\mathcal{Z}$  und  $\mathcal{P}$  vermittelt, läßt sich die  $\eta_{\mathcal{P}}$  nach  $\mathcal{Z}$  transportieren. Die so gewonnene Abbildung  $\eta_{\mathcal{Z}}$  erfüllt die einfache Gleichung

$$\eta_{\mathcal{Z}}(\mathbf{z}) = (\eta_{\mathcal{E}}^{-1})^*(\mathbf{z}). \quad (3.81)$$

Die Forderung, daß  $\eta_{\mathcal{E}}$  auf  $\mathcal{M}$  projizierbar sein muß, ist hier versteckt: ohne sie wäre das Bild  $\eta_{\mathcal{Z}}(\mathbf{z})$  nicht mehr automatisch in  $\mathcal{Z}$ .

**Lemma 3.5.1 ([32], prop.4.2)** *Mit dem Isomorphismus  $\Phi$  aus Satz 3.1.4 gilt für die entsprechenden Hebungen  $\eta_{\mathcal{P}}$  bzw.  $\eta_{\mathcal{Z}}$  beliebiger Bündeldiffeomorphismen  $\eta_{\mathcal{E}}$  auf  $\mathcal{E}$*

$$\Phi \circ \eta_{\mathcal{Z}} = \eta_{\mathcal{P}} \circ \Phi. \quad (3.82)$$

BEWEIS. Es sei  $\mathbf{z} \in (\mathcal{Z})_{\mathbf{v}}$  und  $\bar{\mathbf{v}} \in (\mathfrak{J}^1\mathcal{E})_{\mathbf{v}}$ . Man berechnet unter Verwendung der Definitionen und der Interpretation der Elemente von  $(\mathfrak{J}^1\mathcal{E})_{\mathbf{v}}$  als Abbildungen von  $T_{\mathbf{m}}\mathcal{M}$  nach  $T_{\mathbf{v}}\mathcal{E}$  ( $\mathbf{m} = \text{pr}_{\mathcal{M}\mathcal{E}}\mathbf{v}$ )

$$\begin{aligned} (\eta_{\mathcal{P}}(\Phi(\mathbf{z}))) (\bar{\mathbf{v}}) &= (\eta_{\mathcal{M}}^{-1})^* \left( \Phi(\mathbf{z}) \left( \eta_{\mathfrak{J}^1\mathcal{E}}^{-1}(\bar{\mathbf{v}}) \right) \right) \\ &= (\eta_{\mathcal{M}}^{-1})^* \left( \Phi(\mathbf{z}) (T\eta_{\mathcal{E}}^{-1} \circ \bar{\mathbf{v}} \circ T\eta_{\mathcal{M}}) \right) \\ &= (\eta_{\mathcal{M}}^{-1})^* \left( (T\eta_{\mathcal{E}}^{-1} \circ \bar{\mathbf{v}} \circ T\eta_{\mathcal{M}})^* \mathbf{z} \right) \\ &= (\eta_{\mathcal{M}}^{-1})^* (\eta_{\mathcal{M}})^* \bar{\mathbf{v}}^* (\eta_{\mathcal{E}}^{-1})^* \mathbf{z} \\ &= \bar{\mathbf{v}}^* (\eta_{\mathcal{Z}}(\mathbf{z})) \\ &= (\Phi(\eta_{\mathcal{Z}}(\mathbf{z}))) (\bar{\mathbf{v}}). \end{aligned} \quad (3.83)$$

$\square$

Es sei weiter  $\xi_{\mathcal{E}} = (\xi^{\mu}, \xi^A)$  der lokale Ausdruck für eine infinitesimale Transformation auf  $\mathcal{E}$ , die sich nach  $\mathcal{M}$  projizieren läßt. Hebt man die zugehörige Flußabbildung mit der eben geschilderten

Methode nach  $\mathcal{P}$ , so ergibt sich dort ein Vektorfeld  $\xi_{\mathcal{P}}$ , das in Koordinaten die folgende Gestalt annimmt ([32], Gleichung (4B.10)):

$$\xi_{\mathcal{P}} = (\xi^{\mu}, \xi^A, -p\partial_{\nu}\xi^{\nu} - p_B^{\nu}\partial_{\nu}\xi^B, p_A^{\nu}\partial_{\nu}\xi^{\mu} - p_B^{\mu}\partial_A\xi^B - p_A^{\mu}\partial_{\nu}\xi^{\nu}). \quad (3.84)$$

Die auf diese Weise gehobenen Vektorfelder lassen sich nach dem folgenden Satz (s. [32], ch. 4C) als spezielle kovariante kanonische Transformationen deuten.

**Satz 3.5.2** *Es sei  $\xi_{\mathcal{P}} \in \mathfrak{X}(\mathcal{P})$  die Hebung eines auf  $\mathcal{M}$  projizierbaren Vektorfeldes auf  $\mathcal{E}$ . Dann gilt*

$$L_{\xi_{\mathcal{P}}}\Theta = 0, \quad (3.85)$$

wobei  $L_{\xi_{\mathcal{P}}}$  die Lie-Ableitung in Richtung  $\xi_{\mathcal{P}}$  bezeichne. Mit anderen Worten,  $\xi_{\mathcal{P}}$  ist das eindeutige Hamiltonsche Vektorfeld zu der Hamiltonschen  $(n-1)$ -Form

$$\mathcal{I}(\xi_{\mathcal{P}}) = \xi_{\mathcal{P}} \lrcorner \Theta. \quad (3.86)$$

BEWEIS. Wir benutzen die Beziehung (3.81) und die Definition von  $\Theta$ , um für alle  $\eta_{\mathcal{P}}$  zu zeigen

$$(\eta_{\mathcal{P}})^*\Theta = \Theta. \quad (3.87)$$

Man berechnet also für ein beliebiges  $n$ -Vektorfeld  $\zeta$  in einem Punkt  $\mathbf{p} = \Phi(\mathbf{z})$  auf  $\mathcal{P}$

$$\begin{aligned} (\eta_{\mathcal{P}}^*)_{\Phi(\mathbf{z})}(\zeta) &= \Theta_{\Phi(\eta_{\mathcal{P}}\mathbf{z})}(T\eta_{\mathcal{P}}\zeta) \\ &= \eta_{\mathcal{Z}}(\mathbf{z})(T\text{pr}_{\mathcal{E}\mathcal{P}}T\eta_{\mathcal{P}}\zeta) \\ &= \mathbf{z}(T\eta_{\mathcal{Z}}^{-1}T\text{pr}_{\mathcal{E}\mathcal{P}}T\eta_{\mathcal{P}}\zeta) \\ &= \mathbf{z}(T\text{pr}_{\mathcal{E}\mathcal{P}}\zeta) \\ &= \Theta_{\Phi(\mathbf{z})}(\zeta), \end{aligned} \quad (3.88)$$

wobei wir

$$\eta_{\mathcal{Z}}^{-1} \circ \text{pr}_{\mathcal{E}\mathcal{P}} \circ \eta_{\mathcal{P}} = \text{pr}_{\mathcal{E}\mathcal{P}} \quad (3.89)$$

benutzt haben.

Um den Beweis abzuschließen, betrachtet man nun die 1-Parametergruppe von Flußabbildungen zu  $\xi_{\mathcal{P}}$  und erhält die Behauptung durch Differentiation von (3.87) nach dem Entwicklungsparameter.  $\square$

Mit der bereits vorgestellten kovarianten Legendre-Transformation  $\mathbb{F}\mathcal{L}$  kann man nun die Aktion eines Diffeomorphismus  $\eta_{\mathcal{E}}$  nach dem Bild  $\mathbb{F}\mathcal{L}(\mathfrak{J}^1\mathcal{E})$  in  $\mathcal{P}$  heben. Es ergibt sich daraus die Frage, wann dieser Weg zum gleichen Resultat wie der kanonische führt. Dies stellt Bedingungen an die Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}$ .

**Definition 3.5.3** *Es sei  $\mathcal{G}$  eine Untergruppe von  $\text{Aut}(\mathcal{E})$ , der Gruppe der Bündeldiffeomorphismen von  $\mathcal{E}$ . Eine Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  auf  $\mathfrak{J}^1\mathcal{E}$  heißt  $\mathcal{G}$ -äquivariant, wenn für alle  $\eta_{\mathcal{E}} \in \mathcal{G}$ , deren Projektion  $\eta_{\mathcal{M}}$  auf  $\mathcal{M}$  und deren erste Jet-Verlängerung  $\eta_{\mathfrak{J}^1\mathcal{E}}$  gilt*

$$\mathcal{L}(\eta_{\mathfrak{J}^1\mathcal{E}}(\bar{\mathbf{v}})) = (\eta_{\mathcal{M}}^{-1})^*\mathcal{L}(\bar{\mathbf{v}}). \quad (3.90)$$

**Lemma 3.5.4** *Es sei  $\mathcal{L}$  eine  $\mathcal{G}$ -äquivalente Lagrange-Dichte. Dann stimmt die mit der Legendre-Transformation  $\mathbb{F}\mathcal{L}$  nach transportierte  $\mathcal{G}$ -Aktion mit der auf  $\mathcal{P}$  kanonisch gehobenen überein,*

$$\eta_{\mathcal{P}} \circ \mathbb{F}\mathcal{L} = \mathbb{F}\mathcal{L} \circ \eta_{\mathfrak{J}^1\mathcal{E}} \quad (3.91)$$

für alle  $\eta_{\mathcal{E}}$  in  $\mathcal{G}$ .

BEWEIS. Es seien  $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$ ,  $\mathbf{v} \in (\mathcal{E})_{\mathbf{m}}$ ,  $\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{w}} \in (\mathfrak{J}^1\mathcal{E})_{\mathbf{v}}$  und  $\mathbf{p} = \mathbb{F}\mathcal{L}(\bar{\mathbf{v}})$ . Weiter sei  $\tilde{\eta}$  für jedes  $\eta_{\mathcal{E} \in \mathcal{G}}$  auf dem Bild der kovarianten Legendre-Transformation definiert durch

$$\tilde{\eta} \circ \mathbb{F}\mathcal{L} = \mathbb{F}\mathcal{L} \circ \eta_{\mathfrak{J}^1\mathcal{E}}. \quad (3.92)$$

Mit der Definition von  $\mathbb{F}\mathcal{L}$  als Faserableitung berechnet man nun (Additions- und Subtraktionszeichen stehen kurz für die affinen Operationen)

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(\mathbb{F}\mathcal{L}(\bar{\mathbf{v}}))(\eta_{\mathfrak{J}^1\mathcal{E}}(\bar{\mathbf{w}})) &= \mathbb{F}\mathcal{L}(\eta_{\mathfrak{J}^1\mathcal{E}}(\bar{\mathbf{v}}))(\eta_{\mathfrak{J}^1\mathcal{E}}(\bar{\mathbf{w}})) \\ &= \mathcal{L}(\eta_{\mathfrak{J}^1\mathcal{E}}(\bar{\mathbf{v}})) + \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathcal{L}(\eta_{\mathfrak{J}^1\mathcal{E}}(\bar{\mathbf{v}}) + \varepsilon(\eta_{\mathfrak{J}^1\mathcal{E}}(\bar{\mathbf{w}}) - \eta_{\mathfrak{J}^1\mathcal{E}}(\bar{\mathbf{v}}))) \\ &= (\eta_{\mathcal{M}}^{-1})^* \mathcal{L}(\bar{\mathbf{v}}) + \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} (\eta_{\mathcal{M}}^{-1})^* \mathcal{L}(\bar{\mathbf{v}} + \varepsilon(\bar{\mathbf{w}} - \bar{\mathbf{v}})) \\ &= (\eta_{\mathcal{M}}^{-1})^* (\mathbb{F}\mathcal{L}(\bar{\mathbf{v}})(\bar{\mathbf{w}})) \\ &= \eta_{\mathcal{P}}(\mathbb{F}\mathcal{L}(\bar{\mathbf{v}}))(\eta_{\mathfrak{J}^1\mathcal{E}}(\bar{\mathbf{w}})). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Für die letzte Zeile haben wir die Definition (3.80) herangezogen.  $\square$

## 3.6 Korrespondenz von Multivektorfeldern und Lösungen der Feldgleichungen

### 3.6.1 Multivektorfelder und Distributionen

In der Hamiltonschen Formulierung der klassischen Mechanik, an der wir uns orientieren wollen, existiert durch die kanonische symplektische Form zu jeder Funktion  $h$  auf dem Phasenraum genau ein Vektorfeld, dessen Integralkurven die Lösungen der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen zu  $h$  darstellen.

In einer Feldtheorie sind die Lösungen der De Donder-Weylschen Gleichungen keine Kurven, sondern höherdimensionale Untermannigfaltigkeiten des Faserbündels der Theorie. Diese werden durch sogenannte glatte Distributionen beschrieben. Andererseits tauchen in Gleichung (3.46), die die Entsprechung von Hamiltonfunktion und Hamiltonischem Vektorfeld der Mechanik ersetzen soll, auf natürliche Weise Multivektorfelder, d.h. Linearkombinationen antisymmetrischer Tensorprodukte von Vektorfeldern, auf. Es ist demnach zu untersuchen, inwiefern derartige Multivektorfelder und die erwähnten glatten Distributionen in Beziehung zueinander stehen, und ob die Hamiltonschen Multivektorfelder auf diese Weise Lösungen der De Donder-Weyl-Gleichungen beschreiben.

Die Theorie der glatten Distributionen, insbesondere deren Integrabilität – die die Brücke zu Untermannigfaltigkeiten und Foliationen bildet – ist gut bekannt und findet sich zum Beispiel in [49]. Es sollen an dieser Stelle nur die wichtigsten Begriffe der Vollständigkeit halber aufgeführt werden.

Sei  $\mathcal{M}$  eine Mannigfaltigkeit und  $\mathfrak{X}_{\text{loc}}(\mathcal{M})$  die Menge der (glatten) lokalen Vektorfelder auf ihr. Hat man für jeden Punkt  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$  einen Unterraum  $E_{\mathbf{x}} \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$  des Tangentialraumes an  $\mathbf{x}$  gegeben, so beschreibt die disjunkte Vereinigung  $E = \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}} E_{\mathbf{x}}$  eine Distribution  $E$ . Es sei  $\mathfrak{X}_E$  die Teilmenge derjenigen lokalen Vektorfelder, die an jedem Punkt  $\mathbf{x}$  Werte in  $E_{\mathbf{x}}$  annehmen,

$$\mathfrak{X}_E := \{X \in \mathfrak{X}_{\text{loc}}(\mathcal{M}) \mid X(\mathbf{x}) \in E_{\mathbf{x}}, \text{ falls } \mathbf{x} \text{ im Definitionsbereich von } X \text{ liegt.}\}. \quad (3.94)$$

Spannt  $\mathfrak{X}_E$  in jedem Punkt die Distribution  $E$  auf, so heißt  $E$  glatte Distribution. Eine Integralmannigfaltigkeit einer glatten Distribution  $E$  auf  $\mathcal{M}$  ist eine Untermannigfaltigkeit  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ , die  $T_{\mathbf{x}}\mathcal{N} = E_{\mathbf{x}}$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{N}$  erfüllt.  $\mathcal{N}$  heißt maximale Integralmannigfaltigkeit, wenn  $\mathcal{N}$  in keiner Integralmannigfaltigkeit echt enthalten ist. Eine Distribution  $E$  ist integrierbar, wenn jeder Punkt von  $\mathcal{M}$  in einer (maximalen) Integralmannigfaltigkeit enthalten ist. Die Menge aller dieser (eindeutig existierenden) maximalen Integralmannigfaltigkeiten heißt dann von  $E$  induzierte Foliation von  $\mathcal{M}$ . Die Elemente der Foliation heißen deren Blätter. Es gilt nun, daß der Fluß zu jedem  $X \in \mathfrak{X}_E$  immer innerhalb eines Blattes bleibt. Die umgekehrte Frage, ob die Flüsse zu allen  $X \in \mathfrak{X}_E$  gemeinsam Untermannigfaltigkeiten definieren, führt auf die Betrachtung der Lie-Klammer aller dieser lokalen Vektorfelder  $X$  untereinander.

Eine Teilmenge  $\mathcal{V} \subset \mathfrak{X}_{\text{loc}}(\mathcal{M})$  ist in Involution, wenn für alle lokalen Vektorfelder  $X, Y \in \mathcal{V}$  der Kommutator  $[X, Y]$  – definiert auf dem Durchschnitt der Definitionsbereiche von  $X$  und  $Y$  – wieder in  $\mathcal{V}$  liegt. Ist eine Teilmenge  $\mathcal{V} \subset \mathfrak{X}_{\text{loc}}(\mathcal{M})$  in Involution, so spannen die Elemente von  $\mathcal{V}$  in jedem Punkt von  $\mathcal{M}$  eine integrierbare Distribution  $E(\mathcal{V})$  auf, wenn die Dimension von  $E(\mathcal{V})$  entlang der Flußlinien aller Elemente von  $\mathcal{V}$  konstant ist ([49], 3.25). Offensichtlich ist diese Bedingung erfüllt, wenn die so aufgespannte Distribution in jedem Punkt von  $\mathcal{M}$  einen Unterraum konstanter Dimension auszeichnet.

Wenden wir uns wieder den (lokalen) Multivektorfeldern über einer Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  zu. Die folgende Beobachtung, die sich auch in [23] findet, klärt, inwiefern Multivektoren – also das Bild  $X(\mathbf{x})$  eines Multivektorfeldes  $X$  in einem Punkt  $\mathbf{x}$  von  $\mathcal{M}$  – Unterräume des Tangentialraumes von  $\mathcal{M}$  beschreiben. Zur Illustration betrachte man die Abbildung 3.6.1.

**Lemma 3.6.1** *Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Zu einem gegebenen  $Y \in \Lambda^k V$ ,  $k \leq \dim V$  existieren genau dann  $k$  linear unabhängige Vektoren  $\{Y_i\}_{i=1, \dots, k}$  aus  $V$ , die allesamt*

$$Y \wedge Y_i = 0 \quad (3.95)$$

*erfüllen, wenn  $Y$  zerlegbar ist, d.h. wenn es sich schreiben läßt als*

$$Y = Z_1 \wedge \dots \wedge Z_k, \quad Z_i \in V. \quad (3.96)$$

*$Y$  ist dann ein Vielfaches des Tensorproduktes aller  $Y_i$ , und die lineare Hülle aller  $Z_i$  ist gleich der linearen Hülle aller  $Y_i$ .*

**BEWEIS.** Ist  $Y$  zerlegbar, so erfüllen die Vektoren  $Z_i$  von (3.96) wegen der Antisymmetrie von  $\wedge$  natürlich die Bedingung (3.95). Seien umgekehrt  $k$  linear unabhängige Vektoren  $Y_i$  gegeben, die (3.95) erfüllen. Ergänzt man  $\{Y_i\}_{i=1, \dots, k}$  zu einer Basis von  $V$  durch Hinzunahme von Vektoren  $e_j$ , so läßt sich  $Y$  schreiben als Linearkombination der induzierten Basis von  $\Lambda^k V$ ,

$$Y = \sum_{r=1}^k \sum_{i_1 \dots i_r} \sum_{j_1 \dots j_{k-r}} Y_r^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_{k-r}} Y_{i_1} \wedge \dots \wedge Y_{i_r} \wedge e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{k-r}} \quad (3.97)$$

mit Koeffizienten  $Y_r^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_{k-r}}$ . Da die gegebenen  $k$  Vektoren  $Y_i$  linear unabhängig sind, gilt  $Y_1 \wedge \dots \wedge Y_k \neq 0$ , andererseits aber wegen (3.95)

$$0 = X \wedge Y_{i_1} \wedge \dots \wedge Y_{i_r} \quad \forall r \leq k, i_l = 1, \dots, k. \quad (3.98)$$

Sukzessives Auswerten dieser Gleichung, beginnend mit  $r = k$ , zeigt das Verschwinden aller Koeffizienten  $Y_r^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_{k-r}}$  mit  $r < k$ . Es bleibt lediglich der Anteil mit  $Y_k^{1 \dots k}$ , und wir erhalten die gesuchte Zerlegung.

Ist  $Z$  ein von  $\{Y_i\}_{i=1, \dots, k}$  linear unabhängiger Vektor, so gilt

$$Z \wedge Y_1 \wedge \dots \wedge Y_k \neq 0. \quad (3.99)$$

Demnach kann  $Z$  nicht (3.95) genügen. Damit ist die Zerlegung bis auf Bildung von Linearkombinationen eindeutig.  $\square$

Im Falle  $k = n - 1$  ergibt sich eine besondere Situation. Bekanntermaßen läßt sich jede Hyperfläche eines  $n$ -dimensionalen Vektorraumes mithilfe eines Skalarproduktes  $g$  durch Angabe desjenigen Vektors (genauer Strahls), der senkrecht auf allen Vektoren der Hyperfläche steht, charakterisieren. Nun läßt sich aber das gewählte Skalarprodukt  $g$  unter Verwendung der zu ihm (und einer Orientierung) gehörenden Hodge-\*-Operation in folgender Weise ausdrücken ( $\xi, \eta \in V$ ):

$$g(\xi, \eta) = *^{-1}((*\xi) \wedge \eta). \quad (3.100)$$

Ist somit ein  $(n - 1)$ -Multivektor  $X$  gegeben, so findet man sicher  $n - 1$  Vektoren  $\eta_i$ , die auf  $\xi = *X$  senkrecht stehen. Diese erfüllen aber nach obiger Gleichung die Bedingung (3.95) und stellen deshalb eine Zerlegung von  $X$  dar.

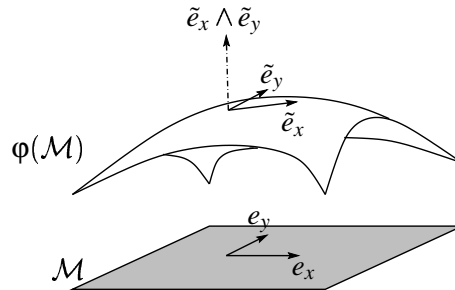


Abbildung 3.1: Die mit dem Schnitt  $\varphi$  gehobenen Vektoren  $\tilde{e}_x$  und  $\tilde{e}_y$  spannen den Tangentialraum an einem Punkt auf. Beide Vektoren können zu einem 2-Vektor  $\tilde{e}_x \wedge \tilde{e}_y$  kombiniert werden, der diesen Tangentialraum alternativ beschreibt.

### 3.6.2 Zerlegung Hamiltonscher $n$ -Vektorfelder

Es sei jetzt wieder  $\mathcal{M}$  die  $n$ -dimensionale Basismannigfaltigkeit des Faserbündels  $\mathcal{E}$  einer Feldtheorie.

Nach der Beobachtung des vorangegangenen Abschnittes ist zu untersuchen, ob Hamiltonsche Multivektorfelder zerlegbar sind. Dabei wollen wir das Augenmerk natürlich auf Lösungen der De Donder-Weylschen Bewegungsgleichungen richten, die  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten von

$\mathcal{P}$ , dem zu  $\mathcal{E}$  assoziierten erweiterten multisymplektischen Phasenraum, beschreiben. Die uns interessierenden Distributionen haben somit in jedem Punkt von  $\mathcal{E}$  die Dimension  $n$ , weshalb wir die Zerlegbarkeit Hamiltonscher  $n$ -Vektoren zu untersuchen haben. Über die Zerlegbarkeit hinaus müssen wir berücksichtigen, daß Schnitte in  $\mathcal{P}$  und also insbesondere Lösungen der Feldgleichungen  $\text{pr}_{\mathcal{M}\mathcal{P}}$ -transversal sind. Für beliebige (lokale) Schnitte  $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{P}$  muß nämlich gelten

$$T\text{pr}_{\mathcal{M}\mathcal{P}} \circ T\pi = \text{Tid}_{\mathcal{M}}, \quad (3.101)$$

woraus folgt, daß die Projektion auf  $\mathcal{M}$  einer integrierbaren Distribution auf  $\mathcal{P}$ , deren Blätter Schnitte in  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$  beschreiben, für alle Punkte in  $\mathcal{P}$  den entsprechenden Tangentialraum an  $\mathcal{M}$  ausschöpft.

Der folgende Satz ([65]) untersucht zum einen die Frage, ob zu gegebener Hamiltonscher Funktion  $h$  – denn diese kommen nach Dimensionsabzählung in (3.46) gerade in Betracht – ein zerlegbares Hamiltonsches  $n$ -Vektorfeld  $X_h$  gefunden werden kann, und zum anderen, ob die Vereinigung der Tangentialräume an einen Schnitt  $\pi \in \Gamma(\mathcal{P})$ , der die De Donder-Weylschen Gleichungen löst, ein Hamiltonsches  $n$ -Vektorfeld auf diesem Schnitt definiert. Alle folgenden Überlegungen sind als lokale Aussagen aufzufassen, das heißt als gültig innerhalb einer lokalen Trivialisierung des Bündels  $\mathcal{E}$  über  $\mathcal{M}$ .

### Satz 3.6.2

1. Es sei  $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{P})$  eine Funktion auf dem erweiterten multisymplektischen Phasenraum von der speziellen Gestalt

$$h(x, v, \vec{p}, p) = -\mathcal{H}(x, v, \vec{p}) - p. \quad (3.102)$$

Dann existiert lokal ein zugehöriges zerlegbares Hamiltonsches  $n$ -Vektorfeld  $X_h$ , das eine  $\text{pr}_{\mathcal{M}\mathcal{P}}$ -transversale Distribution beschreibt.

2. Es sei  $\pi \in \Gamma(\mathcal{P})$  eine (lokale) Lösung der De Donder-Weyl-Gleichungen zur De Donder-Weyl-Hamiltonfunktion  $\mathcal{H}$ . Dann beschreibt der Tangentialraum an  $\pi$  in jedem Punkt  $\pi(x)$ ,  $x \in \mathcal{M}$ , einen Hamiltonschen  $n$ -Vektor zu der Funktion  $h$  in (3.102).

**BEMERKUNG.** Die  $p$ -Koordinate in (3.102) ist die vertikale Koordinate des affinen Bündels  $\mathcal{P} \rightarrow \Pi$ , weshalb die angegebene Gestalt koordinatenunabhängig ist. In einer invarianten Formulierung hätte man das vertikale Vektorfeld zu verwenden, welches aus der Aktion des (für orientierbare Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{M}$  trivialen) zu  $\mathcal{P} \rightarrow \Pi$  assoziierten Geradenbündels resultiert. Dieses muß nach Anwendung auf  $h$  die konstante Funktion 1 auf  $\mathcal{P}$  ergeben. Die Konstruktion im Beweis wird auch andere Funktionen  $h$  zulassen, es darf nur nirgendwo die Ableitung von  $h$  nach  $p$  verschwinden. Insbesondere sind also auch solche Funktionen der Form  $h(x, v, \vec{p}, p) = \mathcal{H}(x, v, \vec{p}) + p$  zulässig. Diese spielen aber im weiteren keine Rolle.

Die spezielle  $p$ -Abhängigkeit ist nicht so ungewöhnlich, schon in der zeitabhängigen Hamiltonschen Mechanik muß eine gegebene Hamilton-Funktion um diesen additiven Beitrag erweitert werden, will man die richtige Zeitentwicklung durch Poisson-Klammern beschreiben ([54]).

**BEWEIS DES SATZES.** Die definierende Relation (3.46) bedeutet für den allgemeinen Ansatz<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} X = & \frac{1}{n!} X^{V_1 \cdots V_n} \partial_{V_1} \cdots \partial_{V_n} + \frac{1}{(n-1)!} X^{AV_1 \cdots V_{n-1}} \partial_A \partial_{V_1} \cdots \partial_{V_{n-1}} \\ & + \frac{1}{(n-1)!} X_A^{\sigma V_1 \cdots V_{n-1}} \partial_\sigma^A \partial_{V_1} \cdots \partial_{V_{n-1}} + \frac{1}{(n-1)!} X_0^{V_1 \cdots V_{n-1}} \partial \partial_{V_1} \cdots \partial_{V_{n-1}} \\ & + \frac{1}{(n-2)!} X_A^{\sigma B V_1 \cdots V_{n-2}} \partial_\sigma^A \partial_B \partial_{V_1} \cdots \partial_{V_{n-2}} + \text{Terme höherer vertikaler Ordnung} \end{aligned} \quad (3.103)$$

<sup>4</sup>Für die Kurzschreibweise der partiellen Ableitungen konsultiere man (3.5).



(die nicht explizit angegebenen Terme von  $X$  tragen zur Kontraktion mit  $\Omega$  nicht bei und bleiben von vornherein unbestimmt) für die Koeffizienten

$$\begin{aligned}\partial_A h &= \frac{(-1)^n}{(n-1)!} X^{\mu\nu_1 \dots \nu_{n-1}} \epsilon_{\mu\nu_1 \dots \nu_{n-1}}, \\ \partial_\mu^A h &= -\frac{(-1)^n}{(n-1)!} X^{A\nu_1 \dots \nu_{n-1}} \epsilon_{\mu\nu_1 \dots \nu_{n-1}}, \\ \partial_\mu h &= -\frac{1}{(n-2)!} X_A^{\sigma\nu_1 \dots \nu_{n-2}} \epsilon_{\sigma\nu_1 \dots \nu_{n-2}\mu} - \frac{1}{(n-1)!} X_0^{\nu_1 \dots \nu_{n-1}} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_{n-1}\mu}, \\ \partial h &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!} X^{\nu_1 \dots \nu_n} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_n}.\end{aligned}\tag{3.104}$$

Gesucht werden  $n$  linear unabhängige Vektorfelder  $Z_\mu$ ,

$$Z_\mu = (Z_\mu)^\nu \partial_\nu + (Z_\mu)^A \partial_A + (Z_\mu)_A^\nu \partial_\nu^A + (Z_\mu)_0 \partial,\tag{3.105}$$

deren antisymmetrisches Tensorprodukt  $Y = Z_1 \wedge \dots \wedge Z_n$  ein nach (3.104) zulässiges Hamiltonsches Vektorfeld  $X$  zu  $h$  ergibt. Explizite Berechnung von  $Y$  führt auf

$$\begin{aligned}Y &= Z_1 \wedge \dots \wedge Z_n \\ &= (Y_1)^{\mu_1} \dots (Y_n)^{\mu_n} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} \partial_{x^1} \dots \partial_{x^n} \\ &\quad + \sum_{\mu=1}^n (-1)^{\mu+1} (Z_\mu)^A (Z_1)^{\nu_1} \dots \widehat{(Z_\mu)^{\nu_\mu}} \dots (Z_n)^{\nu_n} \partial_A \partial_{\nu_1} \dots \widehat{\partial_{\nu_\mu}} \dots \partial_{\nu_n} \\ &\quad + \sum_{\mu=1}^n (-1)^{\mu+1} (Z_\mu)_A^\sigma (Z_1)^{\nu_1} \dots \widehat{(Z_\mu)^{\nu_\mu}} \dots (Z_n)^{\nu_n} \partial_\sigma^A \partial_{\nu_1} \dots \widehat{\partial_{\nu_\mu}} \dots \partial_{\nu_n} \\ &\quad + \sum_{\mu < \nu} (-1)^{\mu+\nu} ((Z_\mu)^A (Z_\nu)_B^\sigma - (Z_\nu)^A (Z_\mu)_B^\sigma) \\ &\quad \quad (Z_1)^{\rho_1} \dots \widehat{(Z_\mu)^{\rho_\mu}} \dots \widehat{(Z_\nu)^{\rho_\nu}} \dots (Z_n)^{\rho_n} \partial_\sigma^B \partial_A \partial_{\rho_1} \dots \widehat{\partial_{\rho_\mu}} \dots \widehat{\partial_{\rho_\nu}} \dots \partial_{\rho_n} \\ &\quad + \text{Terme höherer Ordnung},\end{aligned}\tag{3.106}$$

wobei an offensichtlichen Stellen das Tensorsymbol  $\wedge$  unterdrückt wurde und ein Dach über einem Symbol die Auslassung des jeweiligen Symbols bedeutet. Koeffizientenvergleich mit (3.103) erzwingt unter Benutzung der letzten Gleichung in (3.104)

$$(Z_1)^{\mu_1} \dots (Z_n)^{\mu_n} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{1}{n!} X^{\mu_1 \dots \mu_n} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} = (-1)^{n+1} \partial h = (-1)^n.\tag{3.107}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit des Ansatzes (3.105) können wir also  $(Z_\mu)^\nu = -\delta_\mu^\nu$  annehmen. Verschwindet dagegen die  $p$ -Ableitung von  $h$  in einem Punkt, so kann nach obiger Gleichung die Projektion der  $n$  Vektorfelder  $Z_\mu$  auf  $\mathcal{M}$  nicht mehr linear unabhängig sein.

Durch weiteren Koeffizientenvergleich von  $X$  und  $Y$  erhält man

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n-1)!} X^{A\nu_1 \dots \nu_{n-1}} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_{n-1}\rho} &= \sum_{\mu=1}^n (-1)^{\mu+1} (Z_\mu)^A (Z_1)^{\nu_1} \dots \widehat{(Z_\mu)^{\nu_\mu}} \dots (Z_n)^{\nu_n} \epsilon_{\nu_1 \dots \widehat{\nu_\mu} \dots \nu_n \rho}, \\ \frac{1}{(n-1)!} X_A^{\sigma\nu_1 \dots \nu_{n-1}} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_{n-1}\rho} &= \sum_{\mu=1}^n (-1)^{\mu+1} (Z_\mu)_A^\sigma (Z_1)^{\nu_1} \dots \widehat{(Z_\mu)^{\nu_\mu}} \dots (Z_n)^{\nu_n} \epsilon_{\nu_1 \dots \widehat{\nu_\mu} \dots \nu_n \rho},\end{aligned}\tag{3.108}$$

und mit der speziellen Wahl für die  $(Z_\mu)^\nu$  ergibt sich

$$\begin{aligned}\partial_\rho^A h &= \frac{1}{(n-1)!} X^{A\nu_1 \dots \nu_{n-1}} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_{n-1}\rho} = (Z_\rho)^A \\ -\partial_A h &= \frac{1}{(n-1)!} X_A^{\rho\nu_1 \dots \nu_{n-1}} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_{n-1}\rho} = (Z_\rho)_A^\rho.\end{aligned}\tag{3.109}$$

Die diagonale Wahl für die Koeffizienten  $(Z_\mu)_A^\nu$ ,

$$(Z_\mu)_A^\nu = -\frac{1}{n} \delta_\mu^\nu \partial_A h, \quad (3.110)$$

löst das untere System von Bedingungen in (3.109). Man beachte, daß diese Wahl keinesfalls eindeutig ist, denn (3.104) verfügt nur über die Summe der Diagonalelemente  $(Z_\mu)_A^\mu$ . Insbesondere die Koeffizienten mit  $\mu \neq \nu$  bleiben frei wählbar.

Es bleibt, die Komponenten  $(Z_\mu)_0$  zu bestimmen, aber diese werden durch die Fixierung der übrigen Koeffizienten nach der vorletzten Bedingung in (3.104) bereits eindeutig festgelegt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \partial_\mu h &= -\frac{1}{(n-2)!} X_A^{\sigma A \nu_1 \dots \nu_{n-2}} \epsilon_{\sigma \nu_1 \dots \nu_{n-2} \mu} - \frac{1}{(n-1)!} X_0^{\nu_1 \dots \nu_{n-1}} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_{n-1} \mu} \\ &= -\left( (Z_\mu)^A (Z_\nu)_A^\nu - (Z_\nu)^A (Z_\mu)_A^\nu \right) - (Z_\mu)_0 \\ &= \left( (Z_\mu)^A \partial_A h + \partial_\nu^A h (Z_\mu)_A^\nu \right) - (Z_\mu)_0 \end{aligned} \quad (3.111)$$

für alle Festlegungen für  $(Z_\mu)_A^\nu$  und für die spezielle Lösung (3.110)

$$(Z_\mu)_0 = -\partial_\mu h - \frac{n-1}{n} \partial_\mu^A h \partial_A h. \quad (3.112)$$

Die auf diese Weise lokal konstruierten Vektoren  $Z_\mu$  sind wegen (3.107) linear unabhängig, was  $Y \neq 0$  nach sich zieht. Da die Koeffizienten von  $Y$  aber alle Bedingungen von (3.104) erfüllen, ist  $Y$  ein Hamiltonsches  $n$ -Vektorfeld zu  $h$ . Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Wenden wir uns nun der zweiten Aussage zu. Nach den Ausführungen in Abschnitt 3.2 wissen wir, daß jede Lösung  $\pi$  der De Donder-Weyl-Gleichungen in lokalen Koordinaten von folgender Gestalt ist

$$\pi : (x^\mu) \mapsto (x^\mu, \varphi^A(x), \pi_A^\mu(x), -\mathcal{H}(x, \varphi^A(x), \pi_A^\mu(x))). \quad (3.113)$$

Ist ein Vektorfeld  $Z$  Bestandteil einer Zerlegung eines Hamiltonschen  $n$ -Vektorfeldes  $X_h$ , so gilt nach der Beobachtung 3.6.1

$$Z \lrcorner dh = (X_h \wedge Z) \lrcorner \Omega = 0. \quad (3.114)$$

Die Tangentialvektoren eines Schnittes  $\pi$  lassen sich also höchstens zu solchen Hamiltonschen  $n$ -Vektorfeldern zusammensetzen, deren Hamilton-Funktion (die ja eindeutig bis auf eine Konstante ist) auf  $\pi$  konstant sind. Anhand der speziellen Form (3.113) sieht man, daß die Funktion  $h$ , definiert nach (3.102), auf  $\pi$  sogar verschwindet.

Betrachtet man die Hebungen  $\tilde{Z}_\mu$  der Koordinatenvektorfelder  $\partial_\mu$  auf  $\mathcal{M}$  vermöge  $\pi$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_\mu &= \partial_\mu + \partial_\mu \varphi^A \partial_A + \partial_\mu \pi_A^\nu \partial_\nu^A - [\partial_\mu \mathcal{H} + \partial_A \mathcal{H} \partial_\mu \varphi^A + \partial_\sigma^A \mathcal{H} \partial_\mu \pi_A^\sigma] \partial \\ &= \partial_\mu + \partial_\mu^A \mathcal{H} \partial_A + \partial_\mu \pi_A^\nu \partial_\nu^A - [\partial_\mu \mathcal{H} + \partial_A \mathcal{H} \partial_\mu^A \mathcal{H} + \partial_\sigma^A \mathcal{H} \partial_\mu \pi_A^\sigma] \partial, \end{aligned} \quad (3.115)$$

so prüft man nach, daß die Koeffizienten von  $Z_\mu = -\tilde{Z}_\mu$  auf dem Bild von  $\pi$  den Bedingungen (3.107), (3.109) und (3.111) genügen:

$$\begin{aligned} (Z_\mu)^\nu &= -(\tilde{Z}_\mu)^\nu = -\delta_\mu^\nu \\ (Z_\mu)^A &= -(\tilde{Z}_\mu)^A = -\partial_\mu^A \mathcal{H} = \partial_\mu^A h \\ (Z_\mu)_A^\mu &= -(\tilde{Z}_\mu)_A^\mu = \partial_A \mathcal{H} = -\partial_A h \\ (Z_\mu)_0 &= -(\tilde{Z}_\mu)_0 = \partial_\mu \mathcal{H} + \partial_A \mathcal{H} \partial_\mu^A \mathcal{H} + \partial_\sigma^A \mathcal{H} \partial_\mu \pi_A^\sigma \\ &= -\partial_\mu h + \left( (Z_\sigma)_A^\sigma (Z_\mu)^A - (Z_\sigma)^A (Z_\mu)_A^\sigma \right) \end{aligned} \quad (3.116)$$

Dabei haben wir die De Donder-Weylschen Bewegungsgleichungen benutzt. Ein Vergleich mit (3.107), (3.109) und (3.111) beendet den Beweis des Satzes.  $\square$

### Geometrische Konstruktion der speziellen Form Hamiltonscher De Donder-Weyl-Funktionen

Wie im Abschnitt 3.3 dargelegt wurde, ist die De Donder-Weyl-Hamiltonfunktion  $\mathcal{H}$  im strengen Sinne keine Funktion, sondern beschreibt eine Beziehung zwischen Koordinaten in  $\mathcal{P}$ . Dadurch wird eine Untermannigfaltigkeit, eben das Bild der Legendre-Transformation, ausgezeichnet. Aus  $\mathcal{H}$  läßt sich aber mit einem Zusammenhang  $\Gamma : \mathcal{E} \rightarrow \mathfrak{J}^1\mathcal{E}$  eine Funktion  $\mathcal{H}_\Gamma$  auf  $\Pi$  konstruieren, die in lokalen Koordinaten mit  $\mathcal{H}$  über

$$\mathcal{H}_\Gamma(x, v, \vec{p}) = \mathcal{H}(x, v, \vec{p}) - p_A^\mu \Gamma_\mu^A(v) \quad (3.117)$$

verknüpft ist (siehe Anhang A.2). Nun existiert mit diesem Zusammenhang eine spezielle Funktion auf  $\mathcal{P}$ , definiert über die affine Dualität von  $\mathcal{P}$  und  $\mathfrak{J}^1\mathcal{E}$

$$\mathfrak{p}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}(\Gamma(\text{pr}_{\mathcal{E}\mathcal{P}}(\mathfrak{p}))) = p_A^\mu \Gamma_\mu^A(v) + p, \quad \mathfrak{p} = (x, v, \vec{p}, p) \in \mathcal{P}. \quad (3.118)$$

Mit dieser Funktion und dem Rückzug von  $\mathcal{H}_\Gamma$  auf  $\mathcal{P}$  ergibt sich nun die gesuchte Funktion  $h$ :

$$\begin{aligned} h(x, v, \vec{p}, p) &= -\mathcal{H}_\Gamma(x, v, \vec{p}) - \mathfrak{p}(x, v, \vec{p}, p) \\ &= -\mathcal{H}(x, v, \vec{p}) - p. \end{aligned} \quad (3.119)$$

### 3.6.3 Integrabilität und kovariante Hamilton-Jacobische Differentialgleichung

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir bewiesen, daß zu Hamiltonschen Funktionen  $h$  auf  $\mathcal{P}$  von der speziellen Gestalt

$$h(x, v, \vec{p}, p) = -\mathcal{H}(x, v, \vec{p}) - p, \quad (3.120)$$

zerlegbare Hamiltonsche  $n$ -Vektorfelder existieren, die wiederum  $\text{pr}_{\mathcal{M}\mathcal{P}}$ -transversale Distributionen auf  $\mathcal{P}$  definieren. Dabei übernimmt  $\mathcal{H}$  die Rolle der De Donder-Weylschen Hamiltonfunktion, für die die Integralfächen der Distribution Lösungen der De Donder-Weylschen Gleichungen darstellen. Es bleibt zu untersuchen, ob diese Distributionen auch wirklich integrabel sind. Wie bereits erörtert, ist eine vorgelegte Distribution auf  $\mathcal{P}$  genau dann integrabel, wenn sie in jedem Punkt durch eine Unter-Lie-Algebra von  $\mathfrak{X}(\mathcal{P})$ , der Lie-Algebra der Vektorfelder auf  $\mathcal{P}$ , aufgespannt wird. Wir müssen uns also davon überzeugen, daß solche Zerlegungen eines Hamiltonschen  $n$ -Vektorfeldes existieren, die dieser Bedingung genügen. Bei näherer Betrachtung erweist sich die bereits festgestellte Freiheit der Wahl der Koeffizientenfunktionen  $(Z_\mu)_A^\nu$  als zu groß; ohne eine zusätzliche Einschränkung lassen sich keine allgemeinen positiven Aussagen treffen. Die im folgenden vorgenommene Wahl der Festlegung dieser Komponenten kann man als kovariante Verallgemeinerung der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung deuten.

Um die nun folgenden Ergebnisse zu verstehen, müssen wir uns zuerst dem Falle  $n = 1$ , d.h. der zeitabhängigen Hamiltonschen Mechanik, zuwenden.

In diesem Falle gibt es zu jeder Hamiltonfunktion genau ein Hamiltonsches Vektorfeld, dessen Integralkurven die Lösungen beschreiben. Die Familie dieser Integralkurven läßt sich jedoch nicht

auf den (um die Zeitachse erweiterten) Konfigurationsraum  $Q \times \mathbb{R}$  projizieren, vielmehr ergibt sich eine Korrespondenz zwischen Lösungen der zeitabhängigen Hamilton-Jacobi-Gleichung und Familien von Kurven auf  $Q \times \mathbb{R}$ . Genauer sucht man Abbildungen  $T$  vom erweiterten Konfigurationsraum in den doppelt erweiterten Phasenraum, die durch Zurückziehen und Projektion ein Vektorfeld auf  $Q \times \mathbb{R}$  ergeben. Im Falle der klassischen Mechanik ist  $T$  die äußere Ableitung einer Funktion  $S$ , und das auf diese Weise erhaltene Vektorfeld läßt sich genau dann zu Lösungen der Bewegungsgleichungen integrieren, wenn  $S$  die zeitabhängige Hamilton-Jacobische Differentialgleichung erfüllt ([1]). Wir werden nun die kovariante Verallgemeinerung der Abbildung  $T$  benutzen, um ein Integrabilitätskriterium anzugeben.

Für allgemeine  $n > 1$  übernimmt das Faserbündel  $\mathcal{E}$  die Rolle des erweiterten Konfigurationsraumes, während der erweiterte multisymplektische Phasenraum  $\mathcal{P}$  den doppelt erweiterten Phasenraum  $T^*Q \times \mathbb{R}^2$  ersetzt. Die gesuchte (im allgemeinen nur lokal existierende) Abbildung  $T : \mathcal{E} \supset \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{P}$  soll zwei Eigenschaften besitzen. Erstens soll das vermittels  $T$  und der Tangentialprojektion  $T\text{pr}_{\mathcal{E}\mathcal{P}}$  auf  $\mathcal{E}$  zurückgezogene (eindeutig bestimmte!) Hamiltonsche  $n$ -Vektorfeld eine integrable Distribution erklären, und zweitens sollen die Blätter der zugehörigen Integralmannigfaltigkeiten lokal die De Donder-Weyl-Gleichungen lösen. Der folgende Satz gibt notwendige und hinreichende Kriterien dafür, daß die mit  $T$  erhaltene lokale Distribution auf  $\mathcal{E}$  eine lokale Foliation von  $\mathcal{E}$  ergibt – dies stellt natürlich den Idealfall dar, und es ist im allgemeinen schwierig zu entscheiden, ob eine solche Abbildung  $T$  gefunden werden kann. Im Falle linearer Euler-Lagrange-Gleichungen kann diese Frage jedoch positiv beschieden werden, wie wir am Beispiel des Klein-Gordon-Feldes belegen werden.

**Satz 3.6.3** *Es sei  $\mathcal{H}$  eine reguläre De Donder-Weyl-Hamiltonfunktion und  $\mathcal{U}$  eine offene Umgebung in  $\mathcal{E}$ . Es existiert genau dann eine Foliation von  $\mathcal{E}|_{\mathcal{U}}$ , deren (vermöge der Legendre-Transformation verlängerte) Blätter Lösungen der De Donder-Weylschen Bewegungsgleichungen sind, wenn es einen lokalen Schnitt  $T : \mathcal{E}|_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{P}$  gibt, der in einem Koordinatensystem von  $\mathcal{E}|_{\mathcal{U}}$  den folgenden Bedingungen genügt*

$$\partial_{\mu}^A \mathcal{H}(x, v, \vec{T}(x, v)) = 0, \quad (3.121)$$

$$\partial_{\mu} T_A^{\mu}(x, v) = -\partial_A \mathcal{H}(x, v, \vec{T}(x, v)), \quad (3.122)$$

$$\partial_{\mu} T_0(x, v) = -\partial_{\mu} \mathcal{H}(x, v, \vec{T}(x, v)), \quad (3.123)$$

$$\partial_A T_0(x, v) = \partial_A \mathcal{H}(x, v, \vec{T}(x, v)), \quad (3.124)$$

für alle  $(x, v) \in \mathcal{E}|_{\mathcal{U}}$ , wobei  $\vec{T} = (T_A^{\mu})$  die  $p_A^{\mu}$ -Komponenten und  $T_0$  die  $p$ -Komponente der Abbildung  $T$  bezeichnen.

**BEMERKUNG.** Kann man die Multiimpulskomponenten  $T_A^{\mu}$  der Abbildung  $T$  als Ableitungen eines Satzes anderer Funktionen  $S^{\mu}$  schreiben,

$$T_A^{\mu}(x, v) = (\partial_A S^{\mu})(x, v), \quad (3.125)$$

so ist (3.122) eine direkte Konsequenz des Bestehens der kovarianten Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung ([72], ch. 4, sec. 2),

$$\partial_{\mu} S^{\mu}(x, v) + \mathcal{H}(x, v, \partial_A S^{\mu}(x, v)) = 0, \quad (3.126)$$

welche für  $n = 1$  die bekannte Gestalt der zeitabhängigen Hamilton-Jacobi-Gleichung der Mechanik annimmt. Mit (3.123) und (3.124) unterscheiden sich dann  $\partial_{\mu} S^{\mu}$  und  $T_0$  nur um eine Konstante, die

durch Redefinition von  $T_0$  zu Null gesetzt werden kann.

BEWEIS DES SATZES. Wir nehmen zuerst an, daß eine lokale Foliation von  $\mathcal{E}|_{\mathcal{U}}$  mit Lösungen der Feldgleichungen gegeben sei, also eine bijektive Abbildung

$$\varphi : E \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{E}|_{\mathcal{U}}. \quad (3.127)$$

Eine solche Abbildung stellt aber eine lokale Trivialisierung von  $\mathcal{E}$  dar, die wir im folgenden für Koordinatenausdrücke benutzen wollen. Für jedes  $w \in V$  ist  $\varphi_w = \varphi(w, \cdot)$  ein lokaler Schnitt, der in dem gewählten Koordinatensystem sogar konstant ist, vergleiche Abbildung 3.6.3. Transportiert man nun mit der Legendre-Transformation zur zu  $\mathcal{H}$  gehörigen Lagrange-Dichte ( $\mathcal{H}$  war als regulär angenommen) die Jet-Verlängerung jedes Schnittes  $\varphi_w$  nach  $\mathcal{P}$  und wertet den resultierenden Schnitt bei  $x \in \mathcal{U}$  aus, so ergibt sich auf diese Weise die gesuchte Abbildung  $T : \mathcal{E}|_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{P}$ . Diese erfüllt

$$(\partial_\mu^A \mathcal{H})(x^\mu, w^A, T_A^\mu(x, w)) = (\partial_\mu^A \mathcal{H})(x^\mu, w^A, (\partial_\mu^A L)(x^\mu, w^A, \partial_\mu(\varphi_w)^A(x))) = \partial_\mu(\varphi_w)^A(x) = 0, \quad (3.128)$$

da in der angenommenen Trivialisierung von  $\mathcal{E}$  die Foliationsschnitte konstant sind.

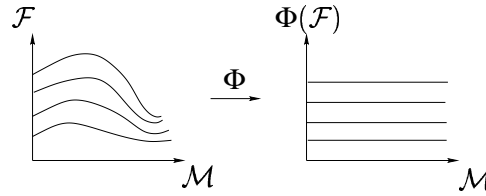


Abbildung 3.2: Eine lokale Foliation kann als Trivialisierung des Bündels  $\mathcal{E}$  benutzt werden, in der die Blätter der Foliation konstant sind.

Dies ist aber die erste Bedingung (3.121).  $(\pi_w)_A^\mu(x) = T_A^\mu(x, \varphi_w(x)) = T_A^\mu(x, w)$  sind aber gerade die Multiimpuls-Komponenten von  $\varphi_w$ , die nach Voraussetzung die De Donder-Weylschen Gleichungen erfüllen sollen, also berechnet man

$$-\partial_A \mathcal{H}(x, \varphi_w(x), (\pi_w)_A^\nu) = \partial_\mu \pi_A^\mu(x) = \partial_\mu T_A^\mu(x, \varphi_w(x)) + \partial_B T_A^\mu(x, \varphi_w(x)) \partial_\mu(\varphi_w)^B(x) = \partial_\mu T_A^\mu(x, w), \quad (3.129)$$

und es ergibt sich (3.122). Schließlich gilt  $T_0(x, w) = -\mathcal{H}(x, w, \vec{T}(x, w))$  nach Konstruktion der Legendre-Transformation, was die Bedingungen (3.122) und (3.122) nach sich zieht.

Es sei nun umgekehrt eine Abbildung  $T$  gegeben, deren Komponenten die Bedingungen des Satzes erfüllen. Dann lassen sich in eindeutiger Weise die Komponenten des Hamiltonschen  $n$ -Vektorfeldes  $X_h$ ,  $h$  wie in (3.102), auf  $\mathcal{E}|_{\mathcal{U}}$  zurückziehen. Bedingung (3.121) besagt nun, daß die vertikalen Anteile jeder Zerlegung des zurückgezogenen  $n$ -Vektorfeldes verschwinden, vgl. (3.109). Die horizontalen Anteile sind aber gerade von der Form  $\partial_\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, n$ , und vertauschen daher. Die durch das zurückgezogene  $n$ -Vektorfeld beschriebene Distribution ist also integrierbar und die Blätter der Foliation sind im gewählten Koordinatensystem konstant. Diese Blätter lassen sich nun für jedes  $w \in V$  wie im ersten Teil des Beweises mit der Legendre-Transformation nach  $\mathcal{P}$  transportieren. Interpretiert man nun (3.128) rückwärts, so zeigt sich, daß wegen (3.122) die  $p_A^\mu$ -Komponenten der entstandenen lokalen Schnitte Lösungen der De Donder-Weyl-Gleichungen darstellen. Die restlichen Bedingungen (3.123) und (3.124) besagen nun gerade, daß sich  $T_0(x, w)$  und  $-\mathcal{H}(x, w, \vec{T}(x, w))$  genau um eine

Konstante unterscheiden. Diese können wir von  $T_0$  subtrahieren, wodurch die Blätter der Foliation tatsächlich jeweils Lösungen ergeben.  $\square$

### 3.6.4 Das freie Klein-Gordon-Feld als Beispiel

Es sei speziell  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^4$  und  $\mathcal{E}$  ein triviales reelles Geradenbündel. Die Klein-Gordon-Gleichung

$$\square\varphi + m^2\varphi = 0, \quad (3.130)$$

wobei  $\square = \partial_{x_0}^2 - \partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2 - \partial_{x_3}^2$  den Wellenoperator bezeichnet, besitzt Lösungen der Form ([69])

$$\Phi(x; w) = w \cos\left(\frac{m}{2}x^0\right) \cosh\left(\frac{m}{2}x^1\right) \cosh\left(\frac{m}{2}x^2\right) \cosh\left(\frac{m}{2}x^3\right), \quad w \in \mathbb{R}. \quad (3.131)$$

Diese Lösungen verschwinden nicht in einem Bereich  $(-\pi/2, \pi/2)$  um die  $x^0 = 0$ -Hyperebene. Sie sind daher als lokale Foliation von  $\mathcal{E}$  in diesem Bereich geeignet, und die Trivialisierungsabbildung lautet

$$\varphi : (x, w) \mapsto \left(x, w \frac{\Phi(x^0, x^1, x^2, x^3; 1)}{\Phi(0, x^1, x^2, x^3; 1)}\right). \quad (3.132)$$

### 3.6.5 Geometrische Formulierung der kovarianten Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung

Die invariante Formulierung der zeitabhängigen Hamilton-Jacobi-Gleichung der klassischen Mechanik interpretiert die Funktion  $S$  als Funktion auf dem erweiterten Konfigurationsraum  $\mathcal{Q} \times \mathbb{R}$ .  $dS$  ist also eine 1-Form und läßt sich als Abbildung in den doppelt erweiterten Phasenraum  $T^*\mathcal{Q} \times \mathbb{R}^2$  verstehen:

$$dS : \mathcal{Q} \times \mathbb{R} \ni (q, t) \mapsto dS(t, q) \in (T^*\mathcal{Q} \times \mathbb{R}^2)_{(q, t)}. \quad (3.133)$$

Die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung lautet nun bekanntermaßen

$$h \circ (dS) = 0, \quad (3.134)$$

wobei  $h(t, q, p, E) = H(t, q, p) + E$  die Hamiltonfunktion auf dem doppelt erweiterten Phasenraum zum durch  $H$  gegebenen zeitabhängigen Problem darstellt.

Dieses Konzept läßt sich wie folgt auf den allgemeinen Fall übertragen. Sei  $S \in \Omega^n(\mathcal{E})$  eine  $\text{pr}_{\mathcal{M}\mathcal{E}}$ -horizontale  $n$ -Form auf dem Konfigurationsbündel  $\mathcal{E}$ . Nach den Überlegungen in Abschnitt 3.1 kann man den erweiterten multisymplektischen Phasenraum aber mit dem Raum aller  $(n+1)$ -Formen auf  $\mathcal{E}$ , die bei Kontraktion mit zwei beliebigen  $\text{pr}_{\mathcal{M}\mathcal{E}}$ -vertikalen Vektorfeldern verschwinden, identifizieren. Da  $S$  als horizontal angenommen wurde, ist  $dS$  von dieser Gestalt und definiert damit einen Schnitt in  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$ . Die kovariante Hamilton-Jacobische Differentialgleichung (3.126) lautet nun

$$h \circ dS = 0 \quad (3.135)$$

für die speziellen  $h$  der Form (3.102). In der Tat rechnet man für  $S = S^\mu d_\mu x$  nach

$$0 = h \circ dS = -H(x, v, \partial_A S^\mu(x, v)) - \partial_\mu S^\mu(x, v). \quad (3.136)$$

Die im vorigen Abschnitt eingeführte Abbildung  $T$  läßt sich also als  $T = dS$  verstehen.  $T$  erfüllt somit  $h \circ T = 0$ . Eine offensichtliche Abschwächung beider Bedingungen ist sicherlich

$$dT = 0, \quad d(h \circ T) = 0. \quad (3.137)$$

Eine Auswertung in Koordinaten führt aber für die Koeffizienten von  $T$ ,  $T = T_A^\mu dv^A d_\mu x + T_0 d^n x$ , auf

$$\begin{aligned} \partial_A T_0 &= -\partial_\mu T_A^\mu \\ \partial_A T_B^\mu &= \partial_B T_A^\mu \end{aligned} \quad (3.138)$$

und

$$\begin{aligned} -\partial_A \mathcal{H}(x, w, \vec{T}(x, w)) - \partial_V^B \mathcal{H}(x, w, \vec{T}(x, w)) \partial_A T_B^\nu(x, w) &= \partial_A T_0(x, w) = -\partial_\mu T_A^\mu(x, w) \\ -\partial_\mu \mathcal{H}(x, w, \vec{T}(x, w)) - \partial_V^B \mathcal{H}(x, w, \vec{T}(x, w)) \partial_\mu T_B^\nu(x, w) &= \partial_\mu T_0(x, w). \end{aligned} \quad (3.139)$$

Dies sind aber gerade die Forderungen des Satzes, wenn man  $(\partial_\mu^A h) \circ T = 0$  benutzt.

Wenden wir uns zum Schluß dieses Abschnittes der für den Beweis der Integrabilität benutzten Eigenschaft (3.121) zu. Unter einer Koordinatentransformation in  $\mathcal{E}$

$$\chi: (x^\mu, v^A) \mapsto (x^\mu, v^A + \chi^A(x)) \quad (3.140)$$

gehen die kanonisch induzierten Koordinaten des erweiterten multisymplektischen Phasenraumes über in

$$\chi: (x^\mu, v^A, p_A^\mu, p) \mapsto (x^\mu, v^A + \chi^A(x), p_A^\mu, p - \partial_\mu \chi^A(x) p_A^\mu). \quad (3.141)$$

Die Forderung (3.121) – die man zunächst für  $h$  in (3.102) formulieren muß, da die Abspaltung des von der Koordinate  $p$  abhängigen Anteils nicht kanonisch ist – nimmt damit die folgende Gestalt an

$$\partial_\mu^A (h \circ \chi) = (\partial_\mu^A h) \circ \chi - \partial_\mu \chi^A (\partial h) \circ \chi = (\partial_\mu^A h) \circ \chi + \partial_\mu \chi^A (\partial h) \circ \chi. \quad (3.142)$$

Verschwinden also in einem Koordinatensystem die  $p_A^\mu$ -Ableitungen von  $h$ , so lassen sie sich in einer alternativen Trivialisierung als raum-zeitliche Ableitungen eines Satzes von Funktionen  $\chi^A$  darstellen. Diese kann man nun umgekehrt zu einem Kartenwechsel von  $\mathcal{E}$  benutzen, um zu der im Satz geforderten Eigenschaft von  $h$  zu gelangen.





## Kapitel 4

# Algebraische Aspekte

*Mit der kanonischen multisymplektischen Form und dem Begriff der Hamiltonschen Form gelingt es nun, eine Poisson-Lie-Struktur zu definieren. Dabei wird zum ersten das Problem der Mehrdeutigkeit der Hamiltonschen Multivektorfelder durch die Beschränkung auf sogenannte Poissonsche Formen – ein Unterraum der Hamiltonschen Formen – gelöst. Zum zweiten wird durch die Einführung eines Korrekturterms zur herkömmlichen Definition der Klammeroperation die Gültigkeit der Super-Jacobi-Identität hergestellt.*

*Um die Beweise in übersichtlicher Form darzustellen und den Korrekturterm zu motivieren ist jedoch zunächst eine sorgfältige Analyse der Ausdehnung der Lie-Klammer und der Lie-Ableitung auf Multivektorfelder vonnöten.*

### 4.1 Problemstellung

Da die kanonische multisymplektische  $(n+1)$ -Form  $\Omega$  die kovariante Verallgemeinerung der doppelt erweiterten symplektischen Struktur der klassischen Mechanik darstellt, ist es naheliegend – zunächst für Hamiltonsche  $(n-1)$ -Formen  $h, g$  und deren Hamiltonsche Vektorfelder  $X_h, X_g$  – über

$$\{f, g\} = -X_f \lrcorner X_g \lrcorner \Omega \quad (4.1)$$

eine Klammer einzuführen ([32]). Das Vorzeichen ergibt sich aus der Überlegung, daß zu der Klammer von  $f$  und  $g$  das Vektorfeld  $[X_g, X_f]$  korrespondieren sollte:

$$\begin{aligned} d\{f, g\} &= -d(X_f \lrcorner X_g \lrcorner \Omega) \\ &= -(L_{X_f} X_g) \lrcorner \Omega \\ &= -([X_f, X_g]) \lrcorner \Omega \\ &= ([X_g, X_f]) \lrcorner \Omega. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Die so definierte Klammer ist aber keine Lie-Klammer ([34, 32, 52]) – die Jacobi-Identität gilt nämlich nur bis auf einen exakten Term,

$$\begin{aligned}
\{f, \{g, h\}\} + \text{zykl.} &= -X_f \lrcorner ([X_h, X_g] \lrcorner \Omega) + \text{zykl.} \\
&= (-L_{X_h}(X_f \lrcorner X_g \lrcorner \Omega) + [X_h, X_f] \lrcorner X_g \lrcorner \Omega) \\
&\quad - X_g \lrcorner ([X_f, X_h] \lrcorner \Omega) - X_h \lrcorner ([X_g, X_f] \lrcorner \Omega) \\
&= -L_{X_h}(X_f \lrcorner X_g \lrcorner \Omega) + X_h \lrcorner L_{X_f}(X_g \lrcorner \Omega) \\
&= -d(X_f \lrcorner X_g \lrcorner X_h \lrcorner \Omega).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Die Frage ist nun, ob sich die naive Definition (4.1) um eine geschlossene Form abändern läßt, die den Defekt der Jacobi-Identität absorbiert. Eine Lösung dieses Problems soll im Abschnitt 4.3 vorgestellt werden. In der Literatur ([5, 6, 15]) findet sich ein ähnliches Problem im Rahmen der Theorie der starken Homotopie-Lie-Algebren ([50]). Dort wird, ausgehend von dem Bestehen der Jacobi-Identität für gewisse Funktionale, nach der Jacobi-Identität für die zugehörigen Integralkerne gesucht. Da aber die Integrale auf Formen bestimmten Typs, nämlich den exakten Formen bezüglich eines Differentials  $d_h$ , verschwinden, kann die Jacobi-Identität nur bis auf einen  $d_h$ -exakten Term erreicht werden. Für diesen Fehler kann man wiederum eine zur Jacobi-Identität analoge Gleichung betrachten und erhält so einen Fehler höherer Ordnung, der nun vier Einträgen Platz bietet und so fort. Wesentlich für die Iteration zu beliebig hohen Graden ist, daß  $d_h$  eine triviale Kohomologie besitzt. Dies ist aber im multisymplektischen Fall – in welchem die äußere Ableitung  $d$  den Platz von  $d_h$  einnimmt – nicht gegeben, so daß der Begriff der starken Homotopie-Lie-Algebren trotz anfänglicher, formaler Ähnlichkeiten keine Anwendung findet.

Wie wir im vorangegangenen Kapitel gesehen haben, spielen nicht nur die Hamiltonschen Vektorfelder als infinitesimale Symmetrioperationen, sondern auch die Hamiltonschen  $n$ -Vektorfelder als Tangentialräume an die Lösungen der De Donder-Weyl-Gleichungen eine wichtige Rolle. Wir werden deshalb im nächsten Abschnitt untersuchen, wie sich die Lie-Klammer von Vektorfeldern und die Lie-Ableitung in deren Richtung auf den Fall von Multivektorfeldern verallgemeinern lassen und anschließend diese Erkenntnisse bei der Suche nach einer Lie-Klammer für Hamiltonsche Formen benutzen. In den folgenden Ausführungen wollen wir wie allgemein üblich ausschließlich homogene Elemente (Multivektorfelder, Formen) betrachten, um gradierte Gleichungen aufschreiben zu können. Mit der Linearität kann man diese bekanntermaßen auf Objekte gemischten Grades fortsetzen.

## 4.2 Schouten-Klammer und Lie-Ableitung nach Multivektorfeldern

Das Material dieses Abschnittes findet man zum Beispiel in einem Artikel von TULCZYJEW, [78], die Lie-Ableitung in Richtung von Multivektorfeldern auch im Anhang einer Arbeit von MARTIN, [58]. In [49] wird eine ähnliche Konstruktion für vektorwertige Formen vorgestellt, die dort zur Fröhlicher-Nijenhuis-Klammer führt.

**Definition 4.2.1** *Es sei  $\mathcal{M}$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$  die Lie-Algebra der Vektorfelder auf ihr. Die Schouten-Klammer ist die derivative Fortsetzung im zweiten Argument der Lie-Klammer bezüglich des antisymmetrischen Tensorproduktes  $\wedge$ . Genauer definiert man für  $X, Y, Z \in$*

$\Lambda^{|\mathcal{X}|,|\mathcal{Y}|,|\mathcal{Z}|}\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ ,  $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  und  $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ :

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \Lambda^r \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \Lambda^s \mathfrak{X}(\mathcal{M}) &\rightarrow \Lambda^{r+s-1} \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \text{ bilinear, } r, s = 1, \dots, n \\ [\xi, \eta](f) &= \xi(\eta(f)) - \eta(\xi(f)), \\ [X, Y \wedge Z] &= [X, Y] \wedge Z + (-1)^{(|\mathcal{X}|-1)|\mathcal{Y}|} Y \wedge [X, Z], \\ [X, Y] &= -(-1)^{(|\mathcal{X}|-1)(|\mathcal{Y}|-1)} [Y, X]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Man bemerke, daß das Vorzeichen in der Leibniz-Regel sinnvoll ist, da  $[X, \cdot]$  vom (bzgl. der Tensorstufe) Grade  $(|\mathcal{X}| - 1)$  ist, während  $X \wedge \cdot$  eine Abbildung vom Grade  $|\mathcal{X}|$  definiert. Im ersten Argument ergeben sich die Vorzeichen der Leibniz-Regel unter Benutzung der gradierten Antisymmetrie zu

$$[X \wedge Y, Z] = X \wedge [Y, Z] + (-1)^{|\mathcal{Y}|(|\mathcal{Z}|-1)} [X, Z] \wedge Y. \quad (4.5)$$

Für zerlegbare Vektorfelder findet man eine explizite Formel der Lie-Klammer.

**Lemma 4.2.2** *Es seien  $X = X_1 \wedge \dots \wedge X_p$  und  $Y = Y_1 \wedge \dots \wedge Y_q$  zerlegbare Multivektorfelder, d.h.  $X_i, Y_j \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ . Dann gilt*

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q (-1)^{i+j} [X_i, Y_j] \wedge X_1 \wedge \dots \wedge \widehat{X}_i \wedge \dots \wedge X_p \wedge Y_1 \wedge \dots \wedge \widehat{Y}_j \wedge \dots \wedge Y_q. \quad (4.6)$$

(Wie üblich steht ein Hut über einem Symbol für dessen Auslassung.)

Darüberhinaus erfüllt die Schouten-Klammer die vorzeichenbehaftete Jacobi-Identität

$$(-1)^{(|\mathcal{X}|-1)(|\mathcal{Z}|-1)} [X, [Y, Z]] + \text{zykl. Perm.} = 0. \quad (4.7)$$

BEWEIS. Da die Tensor-Algebra der Multivektorfelder von den Vektorfeldern generiert wird, ist die Schouten-Klammer  $[\cdot, \cdot]$  eindeutig festgelegt. Da aber (4.6) allen Bedingungen von (4.4) genügt, müssen beide Ausdrücke übereinstimmen. Zum Beweise der zweiten Aussage stellt man zunächst fest, daß die Jacobi-Identität für Vektorfelder erfüllt ist und schließt auf Gültigkeit für die höheren Grade per Induktion. Konkret berechnet man für beliebige (homogene) Vektorfelder  $W, X, Y, Z$ :

$$\begin{aligned} &(-1)^{(|\mathcal{W}|-1)(|\mathcal{Y}|+|\mathcal{Z}|-1)} [W, [X, Y \wedge Z]] + (-1)^{(|\mathcal{Y}|+|\mathcal{Z}|-1)(|\mathcal{X}|-1)} [Y \wedge Z, [W, X]] \\ &+ (-1)^{(|\mathcal{X}|-1)(|\mathcal{W}|-1)} [X, [Y \wedge Z, W]] \\ &= (-1)^{(|\mathcal{W}|-1)(|\mathcal{Y}|+|\mathcal{Z}|-1)} [W, [X, Y] \wedge Z] + (-1)^{(|\mathcal{W}|-1)(|\mathcal{Y}|+|\mathcal{Z}|-1)+(|\mathcal{X}|-1)|\mathcal{Y}|} [W, Y \wedge [X, Z]] \\ &+ (-1)^{(|\mathcal{Y}|+|\mathcal{Z}|-1)(|\mathcal{X}|-1)+(|\mathcal{W}|+|\mathcal{X}|)(|\mathcal{Y}|+|\mathcal{Z}|-1)+1} [[W, X], Y \wedge Z] \\ &+ (-1)^{(|\mathcal{X}|-1)(|\mathcal{W}|-1)+(|\mathcal{W}|-1)(|\mathcal{Y}|+|\mathcal{Z}|-1)+1} [X, [W, Y \wedge Z]] \\ &= (-1)^{(|\mathcal{W}|-1)(|\mathcal{Y}|+|\mathcal{Z}|-1)} [W, [X, Y]] \wedge Z + (-1)^{(|\mathcal{W}|-1)(|\mathcal{Y}|+|\mathcal{Z}|-1)+(|\mathcal{W}|-1)(|\mathcal{X}|-1)} [X, Y] \wedge [W, Z] \\ &+ (-1)^{(|\mathcal{W}|-1)(|\mathcal{Y}|+|\mathcal{Z}|-1)+(|\mathcal{X}|-1)|\mathcal{Y}|} [W, Y] \wedge [X, Z] \\ &+ (-1)^{(|\mathcal{W}|-1)(|\mathcal{Y}|+|\mathcal{Z}|-1)+(|\mathcal{X}|-1)|\mathcal{Y}|+(|\mathcal{W}|-1)|\mathcal{Y}|} Y \wedge [W, [X, Z]] \\ &+ (-1)^{(|\mathcal{Y}|+|\mathcal{Z}|-1)(|\mathcal{W}|-1)+1} [[W, X], Y] \wedge Z \\ &+ (-1)^{(|\mathcal{Y}|+|\mathcal{Z}|-1)(|\mathcal{W}|-1)+(|\mathcal{W}|+|\mathcal{X}|)|\mathcal{Y}|+1} Y \wedge [[W, X], Z] \\ &+ (-1)^{(|\mathcal{W}|-1)(|\mathcal{X}|-1)+|\mathcal{Y}|+|\mathcal{Z}|+1} [X, [W, Y] \wedge Z] \\ &+ (-1)^{(|\mathcal{W}|-1)(|\mathcal{X}|-1)+|\mathcal{Y}|+|\mathcal{Z}|+1} [X, Y \wedge [W, Z]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{(|W|-1)(|Y|+|Z|-1)} [W, [X, Y]] \wedge Z + (-1)^{(|W|-1)(|X|+|Z|)} [X, Y] \wedge [W, Z] \\
&\quad + (-1)^{(|W|-1)(|Y|+|Z|-1)+(|X|-1)|Y|} [W, Y] \wedge [X, Z] \\
&\quad + (-1)^{(|W|-1)(|Z|-1)+(|X|-1)|Y|} Y \wedge [W, [X, Z]] \\
&\quad + (-1)^{(|Y|+|Z|-1)(|W|-1)+1} [[W, X], Y] \wedge Z \\
&\quad + (-1)^{(|Y|+|Z|-1)(|W|-1)+(|W|+|X|)|Y|+1} Y \wedge [[W, X], Z] \\
&\quad + (-1)^{(|W|-1)(|X|+|Y|+|Z|+1)} [X, [W, Y]] \wedge Z \\
&\quad + (-1)^{(|W|-1)(|X|+|Y|+|Z|)+(|X|-1)(|W|+|Y|-1)+1} [W, Y] \wedge [X, Z] \\
&\quad + (-1)^{(|W|-1)(|X|+|Y|+|Z|)+(|W|-1)|Y|+1} [X, Y] \wedge [W, Z] \\
&\quad + (-1)^{(|W|-1)(|X|+|Y|+|Z|)+(|W|-1)|Y|+(|X|-1)|Y|+1} Y \wedge [X, [W, Z]] \\
&= (-1)^{(|W|-1)(|Y|+|Z|-1)} [W, [X, Y]] \wedge Z + (-1)^{(|Y|+|Z|-1)(|W|-1)+1} [[W, X], Y] \wedge Z \\
&\quad + (-1)^{(|W|-1)(|X|+|Y|+|Z|)+1} [X, [W, Y]] \wedge Z \\
&\quad + (-1)^{(|W|-1)(|X|+|Z|)} [X, Y] \wedge [W, Z] + (-1)^{(|W|-1)(|X|+|Y|+|Z|)+(|W|-1)|Y|+1} [X, Y] \wedge [W, Z] \\
&\quad + (-1)^{(|W|-1)(|Y|+|Z|-1)+(|X|-1)|Y|} [W, Y] \wedge [X, Z] \\
&\quad + (-1)^{(|W|-1)(|Y|+|Z|-1)+(|X|-1)|Y|+1} [W, Y] \wedge [X, Z] \\
&\quad + (-1)^{(|W|-1)(|Z|-1)+(|X|-1)|Y|} Y \wedge [W, [X, Z]] + (-1)^{(|W|-1)(|X|+|Z|)+(|X|-1)|Y|+1} Y \wedge [X, [W, Z]] \\
&\quad + (-1)^{(|Y|+|Z|-1)(|W|-1)+(|W|+|X|)|Y|+1} Y \wedge [[W, X], Z] \\
&= (-1)^{(|W|-1)(|Y|+|Z|-1)} [W, [X, Y]] \wedge Z + (-1)^{(|Y|+|Z|-1)(|W|-1)+1+(|W|+|X|)(|Y|-1)+1} [Y, [W, X]] \wedge Z \\
&\quad + (-1)^{(|W|-1)(|X|+|Y|+|Z|)+1+(|W|-1)(|Y|-1)+1} [X, [Y, W]] \wedge Z \\
&\quad + (-1)^{(|W|-1)(|Z|-1)+(|X|-1)|Y|} Y \wedge [W, [X, Z]] \\
&\quad + (-1)^{(|W|-1)(|X|+|Z|)+(|X|-1)|Y|+1+(|W|-1)(|Z|-1)+1} Y \wedge [X, [Z, W]] \\
&\quad + (-1)^{(|Y|+|Z|-1)(|W|-1)+(|W|+|X|)|Y|+1+(|W|+|X|)(|Z|-1)+1} Y \wedge [Z, [W, X]] \\
&= (-1)^{(|W|-1)|Y|+(|W|-1)|Z|} [W, [X, Y]] \wedge Z + (-1)^{(|Y|-1)(|X|-1)+|Z|(|W|-1)} [Y, [W, X]] \wedge Z \\
&\quad + (-1)^{(|W|-1)(|X|-1)+|Z|(|W|-1)} [X, [Y, W]] \wedge Z \\
&\quad + (-1)^{(|W|-1)(|Z|-1)+(|X|-1)|Y|} Y \wedge [W, [X, Z]] + (-1)^{(|W|-1)(|X|-1)+(|X|-1)|Y|} Y \wedge [X, [Z, W]] \\
&\quad + (-1)^{(|Y|(|X|-1))+(|Z|-1)(|X|-1)} Y \wedge [Z, [W, X]] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

es läßt sich also aus dem Bestehen der Jacobi-Identität für  $W, X, Y$  und  $W, X, Z$  die Gültigkeit für  $W, X, Y \wedge Z$  folgern. Dies ist aber gleichbedeutend mit der Rechtfertigung der Identität für Multivektorfelder beliebigen Grades.  $\square$

Im nächsten Schritt wollen wir den Begriff der Lie-Ableitungen auf Multivektorfelder verallgemeinern. Da sich diese für Vektorfelder als Super-Kommutator von äußerer Ableitung und Kontraktion schreiben läßt, liegt die folgende Definition nahe.

**Definition 4.2.3** *Es sei  $X \in \Lambda^{|X|} \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  und  $\alpha \in \Omega^*(\mathcal{M})$ . Die Lie-Ableitung  $\alpha$  in Richtung  $X$  ist gegeben durch*

$$L_X \alpha = dX \lrcorner \alpha - (-1)^{|X|} X \lrcorner d\alpha = [d, X \lrcorner] \alpha, \quad (4.8)$$

wobei  $[\cdot, \cdot]$  den gradierten Kommutator von Abbildungen bezeichnet.

**Lemma 4.2.4** *Es sei*

$$l(X, Y, \alpha) = L_X(Y \lrcorner \alpha) - (-1)^{(|X|-1)|Y|} Y \lrcorner L_X \alpha = [L_X, Y \lrcorner] \alpha. \quad (4.9)$$

für beliebige  $r$ - und  $s$ -Vektorfelder  $X$  und  $Y$  und beliebige  $t$ -Formen  $\alpha$ . Dann gilt

$$l(X, Y, f \cdot \alpha) = f \cdot l(X, Y, \alpha) \quad (4.10)$$

$$l(X, Y, \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_t) = \frac{1}{(t-r-s+1)!(r+s-1)!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} l(X, Y, \alpha_{\sigma(1)} \cdots \alpha_{\sigma(r+s-1)}) \wedge \alpha_{\sigma(r+s)} \cdots \alpha_{\sigma(t)}, \quad (4.11)$$

wobei  $f$  eine beliebige Funktion bezeichnet,  $\alpha_i$  für beliebige 1-Formen steht und die Summe über alle Permutation der Zahlen von 1 bis  $t$  läuft.

Damit läßt sich  $l(X, Y, \alpha)$  als Kontraktion eines von  $X$  und  $Y$  abhängigen  $(r+s-1)$ -Vektorfeldes mit  $\alpha$  schreiben.

**BEWEIS.** Da  $l$  offensichtlich in jedem Argument linear ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß  $X = \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_r$  und  $Y = \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_s$  zerlegbare Multivektorfelder sind. Die erste Beziehung ergibt sich damit aus

$$\begin{aligned} l(X, Y, f \cdot \alpha) &= L_X(Y \lrcorner f \alpha) - (-1)^{|Y|(|X|-1)} Y \lrcorner L_X(f \alpha) \\ &= dX \lrcorner Y \lrcorner f \alpha - (-1)^{|X|} X \lrcorner dY \lrcorner f \alpha \\ &\quad - (-1)^{|Y|(|X|-1)} Y \lrcorner dX \lrcorner f \alpha - (-1)^{(|Y|-1)(|X|-1)} Y \lrcorner X \lrcorner d(f \alpha) \\ &= (df) \wedge (X \lrcorner Y \lrcorner \alpha) + f dX \lrcorner Y \lrcorner \alpha \\ &\quad - (-1)^{|X|} X \lrcorner [(df) \wedge (Y \lrcorner \alpha)] - (-1)^{|X|} f X \lrcorner dY \lrcorner \alpha \\ &\quad - (-1)^{|Y|(|X|-1)} Y \lrcorner [(df) \wedge (X \lrcorner \alpha)] - (-1)^{|Y|(|X|-1)} f Y \lrcorner d(X \lrcorner \alpha) \\ &\quad - (-1)^{(|Y|-1)(|X|-1)} Y \lrcorner X \lrcorner (df \wedge \alpha) - (-1)^{(|Y|-1)(|X|-1)} f Y \lrcorner X \lrcorner d\alpha \\ &= (df) \wedge X \lrcorner Y \lrcorner \alpha + f l(X, Y, \alpha) \\ &\quad - (-1)^{|X|} \sum_{j=1}^{|X|} (-1)^{j+1} \xi_j(f) X_{j \lrcorner} Y \lrcorner \alpha - (df) \wedge (X \lrcorner Y \lrcorner \alpha) \\ &\quad - (-1)^{|Y|(|X|-1)} \sum_{k=1}^{|Y|} (-1)^{k+1} \eta_k(f) Y_{k \lrcorner} X \lrcorner \alpha + (-1)^{(|X|-1)(|Y|-1)} (df) \wedge (Y \lrcorner X \lrcorner \alpha) \\ &\quad + (-1)^{(|X|-1)(|Y|-1)} \sum_{j=1}^{|X|} (-1)^{j+1} \xi_j(f) Y \lrcorner X_{j \lrcorner} \alpha \\ &\quad + (-1)^{|Y|(|X|-1)} \sum_{k=1}^{|Y|} (-1)^{k+1} \eta_k(f) Y_{k \lrcorner} X \lrcorner \alpha - (-1)^{(|X|-1)(|Y|-1)} (df) \wedge (Y \lrcorner X \lrcorner \alpha) \\ &= f l(X, Y, \alpha). \end{aligned}$$

Zum Beweise der zweiten Aussage können wir nun annehmen, daß  $\alpha = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_t$  aus geschlossen 1-Formen  $\alpha_i$  zusammengesetzt ist. Es ergibt sich für die linke Seite (die Keilprodukt-Symbole wurden

der Kürze halber unterdrückt)

$$\begin{aligned}
l(X, Y, \alpha_1 \cdots \alpha_t) &= d[X \lrcorner Y \lrcorner \alpha_1 \cdots \alpha_t] - (-1)^r X \lrcorner d[Y \lrcorner \alpha_1 \cdots \alpha_t] \\
&\quad - (-1)^{(r-1)s} Y \lrcorner d[X \lrcorner \alpha_1 \cdots \alpha_t] + (-1)^{(r-1)s+r} Y \lrcorner X \lrcorner d \alpha_1 \cdots \alpha_t \\
&= \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \frac{1}{r!s!(t-r-s)!} d[(Y \lrcorner \alpha_{\sigma(1)} \cdots \alpha_{\sigma(s)})(X \lrcorner \alpha_{\sigma(s+1)} \cdots \alpha_{\sigma(r+s)} \\
&\quad \alpha_{\sigma(r+s+1)} \cdots \alpha_{\sigma(t)}] \\
&\quad - (-1)^r \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \frac{1}{(r-1)!s!(t-r-s+1)!} \\
&\quad [X \lrcorner (dY \lrcorner \alpha_{\sigma(1)} \cdots \alpha_{\sigma(s)}) \alpha_{\sigma(s+1)} \cdots \alpha_{\sigma(r+s-1)}] \alpha_{\sigma(r+s)} \cdots \alpha_{\sigma(t)} \\
&\quad - \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \frac{1}{r!s!(t-r-s)!} \\
&\quad (dY \lrcorner \alpha_{\sigma(1)} \cdots \alpha_{\sigma(s)})(X \lrcorner \alpha_{\sigma(s+1)} \cdots \alpha_{\sigma(r+s)}) \alpha_{\sigma(r+s+1)} \cdots \alpha_{\sigma(t)} \\
&\quad - (-1)^{(r-1)s} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \frac{1}{r!(s-1)!(t-r-s+1)!} \\
&\quad Y \lrcorner [(dX \lrcorner \alpha_{\sigma(1)} \cdots \alpha_{\sigma(r)}) \alpha_{\sigma(r+1)} \cdots \alpha_{\sigma(r+s-1)}] \alpha_{\sigma(r+s)} \cdots \alpha_{\sigma(t)} \\
&\quad - (-1)^{(r-1)s+s} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \frac{1}{r!s!(t-r-s)!} \\
&\quad (dX \lrcorner \alpha_{\sigma(1)} \cdots \alpha_{\sigma(r)})(Y \lrcorner \alpha_{\sigma(r+1)} \cdots \alpha_{\sigma(r+s)}) \alpha_{\sigma(r+s+1)} \cdots \alpha_{\sigma(t)} \\
&= (-1)^{r+1} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \frac{1}{(r-1)!s!(t-r-s+1)!} \\
&\quad [X \lrcorner (dY \lrcorner \alpha_{\sigma(1)} \cdots \alpha_{\sigma(s)}) \alpha_{\sigma(s+1)} \cdots \alpha_{\sigma(r+s-1)}] \alpha_{\sigma(r+s)} \cdots \alpha_{\sigma(t)} \\
&\quad (-1)^{(r+1)s+1} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \frac{1}{r!(s-1)!(t-r-s+1)!} \\
&\quad Y \lrcorner [(dX \lrcorner \alpha_{\sigma(1)} \cdots \alpha_{\sigma(r)}) \alpha_{\sigma(r+1)} \cdots \alpha_{\sigma(r+s-1)}] \alpha_{\sigma(r+s)} \cdots \alpha_{\sigma(t)} \quad (4.12)
\end{aligned}$$

während man die rechte Seite wie folgt umformen kann,

$$\begin{aligned}
\text{r. S.} &= (-1)^{r+1} \frac{1}{(t-r-s+1)!(r+s-1)!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} (X \lrcorner dY \lrcorner \alpha_{\sigma(1)} \cdots \alpha_{\sigma(r+s-1)}) \alpha_{\sigma(r+s)} \cdots \alpha_{\sigma(t)} \\
&\quad + (-1)^{(r+1)s+1} \frac{1}{(t-r-s+1)!(r+s-1)!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} (Y \lrcorner dX \lrcorner \alpha_{\sigma(1)} \cdots \alpha_{\sigma(r+s-1)}) \alpha_{\sigma(r+s)} \cdots \alpha_{\sigma(t)}
\end{aligned}$$

Wenden wir uns dem zweiten Summanden zu. Da die 1-Formen  $\alpha_i$  allesamt geschlossen sein sollen, läßt sich dieser bis auf einen Vorfaktor schreiben als

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} (Y \lrcorner dX \lrcorner \alpha_{\sigma(1)} \cdots \alpha_{\sigma(r+s-1)}) \alpha_{\sigma(r+s)} \cdots \alpha_{\sigma(t)} \\
&= \frac{1}{r!(s-1)!} \sum_{\sigma} \sum_{\sigma'} (-1)^{\sigma+\sigma'} \\
&\quad (Y \lrcorner (dX \lrcorner \alpha_{\sigma'(\sigma(1))} \cdots \alpha_{\sigma'(\sigma(r))}) \alpha_{\sigma'(\sigma(r+1))} \cdots \alpha_{\sigma'(\sigma(r+s-1))}) \alpha_{\sigma(r+s)} \cdots \alpha_{\sigma(t)}.
\end{aligned}$$

Die Summe über  $\sigma'$  läuft dabei jeweils über alle Permutationen von  $\{\sigma(1), \dots, \sigma(r+s-1)\}$  zu einem festen  $\sigma$ . Die zweifache Summation über Permutationen bewirkt nun, daß jede Indexverteilung genau  $(r+s-1)!$ -mal vorkommt, denn man kann jede der  $\sigma'$ -Vertauschungen als eine aus der  $\sigma$ -Summe stammende auffassen. Diese Vielfachheit kürzt sich gegen einen Teil des Vorfaktors des vollen Ausdrucks für den zweiten Summanden. Als Resultat der Umformung der rechten Seite erhält man somit den zweiten Summanden von (4.12), und eine ähnliche Argumentation gilt für den verbleibenden, ersten Term. Damit stimmen beide Seite wie behauptet überein.  $\square$

**Definition 4.2.5** Die Lie-Ableitung eines Multivektorfeldes  $Y \in \Lambda^{|Y|}\mathfrak{X}(\mathcal{M})$  nach  $X$  ist definiert durch

$$(L_X Y) \lrcorner \alpha = L_X(Y \lrcorner \alpha) - (-1)^{(|X|-1)|Y|} Y \lrcorner L_X \alpha = [L_X, Y \lrcorner] \alpha. \quad (4.13)$$

Man bemerke, daß  $L_X$  vom Grade  $(|X| - 1)$  ist, genau wie  $[X, \cdot]$ . Darüberhinaus gilt

$$(L_X Y) \lrcorner df = X(Y(f)) - Y(X(f)) = [X, Y] \lrcorner df \quad (4.14)$$

für Vektorfelder  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ . Die folgende Beobachtung klärt die Beziehung zwischen  $[X, Y]$  und  $L_X Y$ .

**Lemma 4.2.6** Es seien  $X, Y$  Multivektorfelder homogenen Grades in  $\Lambda^{(|X|, |Y|)}\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ . Dann gelten die folgenden Symmetrieeigenschaften

$$\begin{aligned} L_X Y &= (-1)^{|X||Y|} L_Y X \\ L_X(Y \wedge Z) &= Y \wedge (L_X Z) + (-1)^{(|X|-1)|Z|} (L_X Y) \wedge Z. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Vergleicht man dies mit (4.4), so folgt wegen der Eindeutigkeit der Schouten-Klammer

$$L_X Y = (-1)^{(|X|+1)|Y|} [X, Y]. \quad (4.16)$$

BEWEIS. Die erste Eigenschaft ergibt sich aus folgender Rechnung, in der  $\alpha$  ein beliebiges Element aus  $\Omega(\mathcal{M})$  darstellt.

$$\begin{aligned} (L_X Y) \lrcorner \alpha &= L_X(Y \lrcorner \alpha) - (-1)^{(|X|-1)|Y|} Y \lrcorner (L_X \alpha) \\ &= dX \lrcorner (Y \lrcorner \alpha) - (-1)^{|X|} X \lrcorner d(Y \lrcorner \alpha) \\ &\quad - (-1)^{(|X|-1)|Y|} Y \lrcorner d(X \lrcorner \alpha) + (-1)^{(|X|-1)|Y|+|X|} Y \lrcorner (X \lrcorner d\alpha) \\ &= (-1)^{|X||Y|} d(Y \lrcorner (X \lrcorner \alpha)) - (-1)^{(|X|-1)|Y|} Y \lrcorner d(X \lrcorner \alpha) \\ &\quad - (-1)^{|X||Y|+|X|(|Y|-1)} X \lrcorner d(Y \lrcorner \alpha) + (-1)^{|X||Y|+|X|(|Y|-1)+|Y|} X \lrcorner (Y \lrcorner d\alpha) \\ &= (-1)^{|X||Y|} L_Y(X \lrcorner \alpha) - (-1)^{|X||Y|+|X|(|Y|-1)} X \lrcorner (L_Y \alpha) \\ &= (-1)^{|X||Y|} (L_Y X) \lrcorner \alpha. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ähnlich erhält man die zweite Bedingung,

$$\begin{aligned} (L_X(Y \wedge Z)) \lrcorner \alpha &= L_X((Y \wedge Z) \lrcorner \alpha) - (-1)^{(|X|-1)(|Y|+|Z|)} (Y \wedge Z) \lrcorner L_X \alpha \\ &= L_X((Y \wedge Z) \lrcorner \alpha) - (-1)^{(|X|-1)|Z|} Z \lrcorner L_X(Y \lrcorner \alpha) \\ &\quad + (-1)^{(|X|-1)|Z|} Z \lrcorner L_X(Y \lrcorner \alpha) - (-1)^{(|X|-1)(|Y|+|Z|)} Z \lrcorner (Y \lrcorner L_X \alpha) \\ &= (L_X Z) \lrcorner (Y \lrcorner \alpha) + (-1)^{(|X|-1)|Z|} Z \lrcorner (L_X Y) \lrcorner \alpha \\ &= \left( Y \wedge L_X Z + (-1)^{(|X|-1)|Z|} (L_X Y) \wedge Z \right) \lrcorner \alpha. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Die Beziehung (4.16) überträgt nun gerade die gradierte Leibniz-Regel der Schouten-Klammer auf diejenige der Lie-Ableitung,

$$\begin{aligned} L_X(Y \wedge Z) &= (-1)^{(|X|-1)(|Y|+|Z|)} [X, Y \wedge Z] = (-1)^{(|X|-1)(|Y|+|Z|)} [X, Y] \wedge Z \\ &\quad + (-1)^{(|X|-1)(|Y|+|Z|)+(|X|-1)|Y|} Y \wedge [X, Z] \\ &= Y \wedge \left( (-1)^{(|X|-1)|Z|} [X, Z] \right) \\ &\quad + (-1)^{(|X|-1)|Z|} \left( (-1)^{(|X|-1)|Y|} [X, Y] \wedge Z \right) \\ &= Y \wedge L_X Z + (-1)^{(|X|-1)|Z|} L_X Y \wedge Z. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Schließlich kommen die Vorzeichen der gradierten Antisymmetrie unter Vertauschung der Einträge beider Abbildungen über die behauptete Beziehung zur Deckung,

$$(-1)^{(|X|+1)|Y|}[X, Y] = L_X Y = (-1)^{|X||Y|} L_Y X = (-1)^{|X|}[Y, X]. \quad (4.20)$$

Da aber die Schouten-Klammer nur mit diesen Eigenschaften eingeführt wurde, ergibt sich die Gültigkeit der Regel (4.16).  $\square$

In der Literatur (s. z.B. [25]) finden sich auch andere Konventionen. So kann man anstatt der definierenden Gleichung (4.13) für die Lie-Ableitung eines Multivektorfeldes  $X$  nach einem Multivektorfeld  $Y$  auch  $L_X Y \stackrel{!}{=} [X, Y]$  setzen. Es ergibt sich dann eine andere Beziehung als (4.13), die zusätzlich das Vorzeichen aus (4.16) enthält.

Im nächsten Abschnitt wird die Beziehung zwischen dem gradierten Kommutator zweier Lie-Ableitungen und der Lie-Ableitung nach dem Kommutator der beiden Multivektorfelder benötigt. Wir wollen diese hier bereitstellen.

**Satz 4.2.7** Für jedes Paar von homogenen Multivektorfeldern  $X, Y$  und jede Form  $\alpha$  gilt

$$L_X(L_Y \alpha) - (-1)^{(|X|+1)(|Y|+1)} L_Y(L_X \alpha) = (-1)^{(|X|+1)(|Y|+1)} L_{[X, Y]} \alpha. \quad (4.21)$$

BEWEIS. Man berechnet

$$\begin{aligned} L_X(L_Y \alpha) - (-1)^{(|X|+1)(|Y|+1)} L_Y(L_X \alpha) &= dX \lrcorner dY \lrcorner \alpha + (-1)^{|Y|+1} dX \lrcorner Y \lrcorner d\alpha \\ &\quad + (-1)^{|Y|+|X|} X \lrcorner dY \lrcorner d\alpha \\ &\quad + (-1)^{(|X|+1)(|Y|+1)+1} dY \lrcorner dX \lrcorner \alpha \\ &\quad + (-1)^{|X||Y|+|Y|+1} dY \lrcorner X \lrcorner d\alpha + (-1)^{|X||Y|} Y \lrcorner dX \lrcorner d\alpha \\ &= dX \lrcorner dY \lrcorner \alpha + (-1)^{|X|+1} ddX \lrcorner Y \lrcorner \alpha \\ &\quad + (-1)^{(|X|+1)(|Y|+1)+1} dY \lrcorner dX \lrcorner \alpha \\ &\quad + (-1)^{(|X|+1)|Y|+1} dY \lrcorner X \lrcorner d\alpha \\ &\quad + (-1)^{|Y|+1} dX \lrcorner Y \lrcorner d\alpha + (-1)^{|Y|+|X|} X \lrcorner dY \lrcorner d\alpha \\ &\quad + (-1)^{|X||Y|} Y \lrcorner dX \lrcorner d\alpha + (-1)^{|X||Y|+|X|+1} Y \lrcorner X \lrcorner dd\alpha \\ &= (-1)^{|X|+1} dL_X(Y \lrcorner \alpha) + (-1)^{|X||Y|+|X|+|Y|} dY \lrcorner L_X \alpha \\ &\quad + (-1)^{|Y|+1} L_X(Y \lrcorner d\alpha) + (-1)^{|X||Y|} Y \lrcorner L_X d\alpha \\ &= (-1)^{|X|+1} d(L_X Y) \lrcorner \alpha + (-1)^{|Y|+1} (L_X Y) \lrcorner d\alpha \\ &= (-1)^{|X|+1} L_{L_X Y} \alpha \\ &= (-1)^{(|X|+1)(|Y|+1)} L_{[X, Y]} \alpha. \end{aligned} \quad (4.22)$$

$\square$

Kombiniert man weiter (4.13) mit (4.16), so ergibt sich die folgende für künftige Rechnungen nützliche Regel, wieder für beliebige (homogene) Multivektorfelder  $X$  und  $Y$  und beliebige Formen  $\alpha$ .

$$[X, Y] \lrcorner \alpha = (-1)^{(|X|+1)|Y|} L_X(Y \lrcorner \alpha) + (-1)^{|Y|} Y \lrcorner L_X \alpha. \quad (4.23)$$

Die beiden letzten Gleichungen, (4.21) und (4.23), behalten ihre Gültigkeit, selbst wenn die oben erwähnte alternative Konvention für die Lie-Ableitung  $L_X Y$  zweier Multivektorfelder gewählt wurde.



## 4.3 Super-Poisson-Lie-Klammer auf dem erweiterten multisymplektischen Phasenraum

### 4.3.1 Motivation und Definition

In der klassischen Mechanik definiert jede geschlossene 2-Form  $\omega$  auf dem (doppelt erweiterten) Phasenraum  $\mathcal{P}$  eine Abbildung von den glatten Funktionen  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{P})$  auf die Menge der symplektischen Vektorfelder,

$$X_h \lrcorner \omega = dh. \quad (4.24)$$

Mit dieser Zuordnung und der Lie-Ableitung  $L_X$  in Richtung eines Vektorfeldes  $X$  definiert man nun eine Poisson-Klammer auf den Funktionen über dem Phasenraum durch (vgl. z.B. [1])

$$\{f, g\} = -L_{X_f}g. \quad (4.25)$$

Da  $\omega$  geschlossen und nicht entartet war, gilt

$$X_{\{f, g\}} = -[X_f, X_g], \quad (4.26)$$

wobei  $[\cdot, \cdot]$  die Lie-Klammer von Vektorfeldern bezeichnet. Die Antisymmetrie der Poisson-Klammer ergibt sich aus der Tatsache, daß die Kontraktion eines Vektorfeldes mit einer Funktion verschwindet,

$$\begin{aligned} L_{X_f}g + L_{X_g}f &= dX_f \lrcorner g + X_f \lrcorner dg + dX_g \lrcorner f + X_g \lrcorner df \\ &= X_f \lrcorner X_g \lrcorner \omega + X_g \lrcorner X_f \lrcorner \omega = 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Zu prüfen bleibt die Jacobi-Identität, die aus der Eigenschaft der Lie-Ableitung

$$L_X L_Y f - L_Y L_X f = L_{[X, Y]} f \quad (4.28)$$

gefolgert werden kann. Da die Lie-Ableitung eine Leibniz-Regel erfüllt, wird  $(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{P}), \cdot, \{, \})$  zur Poisson-Algebra.

Diese Verhältnisse wollen wir nun auf den Fall allgemeiner Dimension der Basismannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  ausdehnen. Es sollen also fortan wieder die Verhältnisse und Bezeichnungen aus Kapitel 3 gelten.

Wie im vorangegangenen Kapitel dargelegt wurde, treten nun nicht nur Funktionen über dem multisymplektischen Phasenraum  $\mathcal{P}$  und zugehörige Hamiltonsche Vektorfelder auf, sondern es sind Hamiltonsche Formen und Multivektorfelder in die Überlegungen mit einzubeziehen. Wünschenswert ist die Übernahme der Beziehung

$$X_{\{f, g\}} = [X_g, X_f] = -(-1)^{(|X_g|+1)(|X_f|+1)} [X_f, X_g] = -(-1)^{(|X_g|+1)(|X_f|+1)} X_{\{g, f\}}, \quad (4.29)$$

da die Schouten-Klammer die natürliche Verallgemeinerung der Lie-Klammer darstellt. Die gradierte Antisymmetrie zeigt, daß in den folgenden Überlegungen den Hamiltonschen Formen  $f$  der Tensorgrad der zugehörigen Hamiltonschen Vektorfelder  $X_f$  als Gradierung zugeordnet werden sollte; wir schreiben diesen Grad kurz  $|X_f|$ . Es gilt also  $|X_f| = n - |f|$ , wobei  $|f|$  für den Formengrad der Hamiltonschen Form  $f$  steht.

Wie bereits in der Einführung dieses Kapitels erläutert, führt der naive Ansatz

$$\{f, g\} = (-1)^{|X_f|} X_f \lrcorner X_g \lrcorner \Omega \quad (4.30)$$

zwar auf die richtige Symmetrie und auf die gewünschte Eigenschaft (4.29),

$$\begin{aligned} d\{f, g\} &= (-1)^{|X_f|} dX_f \lrcorner X_g \lrcorner \Omega = (-1)^{|X_f|} L_{X_f} X_g \lrcorner \Omega \\ &= (-1)^{|X_f| + (|X_f|+1)|X_g|} [X_f, X_g] \lrcorner \Omega \\ &= [X_g, X_f] \lrcorner \Omega, \end{aligned} \quad (4.31)$$

die Jacobi-Identität ist jedoch verletzt. Konkret findet man

$$\begin{aligned} (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)} \{f, \{g, h\}\} + \text{zykl. Vert.} &= (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+X_f} X_f \lrcorner X_{\{g, h\}} \lrcorner \Omega \\ &\quad + (-1)^{(|X_g|+1)(|X_f|+1)+X_g} X_g \lrcorner X_{\{h, f\}} \lrcorner \Omega \\ &\quad + (-1)^{(|X_h|+1)(|X_f|+1)+X_f+X_g+1} ([X_f, X_g]) \lrcorner X_h \lrcorner \Omega \\ &= (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+|X_g||X_h|+|X_g|} X_f \lrcorner dX_h \lrcorner X_g \lrcorner \Omega \\ &\quad + (-1)^{(|X_g|+|X-h|+1)(|X_f|+1)+|X_g|} X_g \lrcorner dX_f \lrcorner X_h \lrcorner \Omega \\ &\quad + (-1)^{(|X_h|+1)(|X_f|+1)+|X_f|+|X_g|+(|X_g|+1)|X_f|} L_{X_g} X_f \lrcorner X_h \lrcorner \Omega \\ &\quad + (-1)^{(|X_h|+1)(|X_f|+1)+|X_f|+|X_g|+1} X_f \lrcorner dX_g \lrcorner X_h \lrcorner \Omega \\ &= (-1)^{(|X_h|+1)(|X_f|+1)+|X_g|} d(X_f \lrcorner X_g \lrcorner X_h \lrcorner \Omega). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Erwartungsgemäß steht auf der rechten Seite ein geschlossener Term. Wendet man nämlich auf die linken Seite die äußere Ableitung an, so verschwindet die zyklische Summe wegen der gradierten Jacobi-Identität für Multivektorfelder. In der Tat ergibt sich

$$\begin{aligned} (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)} d\{f, \{g, h\}\} &= (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)} [X_{\{g, h\}}, X_f] \lrcorner \Omega \\ &= (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)} [[X_h, X_g], X_f] \lrcorner \Omega \\ &= (-1)^{(|X_f|+|X_g|)(|X_h|+1)+(|X_g|+|X_h|)(|X_f|+1)} [X_f, [X_g, X_h]] \lrcorner \Omega \\ &= (-1)^{|X_f||X_g|+|X_f||X_h|+|X_g||X_h|} (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)} [X_f, [X_g, X_h]] \lrcorner \Omega, \end{aligned} \quad (4.33)$$

und es folgt

$$\begin{aligned} &(-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)} d\{f, \{g, h\}\} + \text{zykl. Vert.} \\ &= (-1)^{|X_f||X_g|+|X_f||X_h|+|X_g||X_h|} \left( (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)} [X_f, [X_g, X_h]] \lrcorner \Omega + \text{zykl. Vert.} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Gesucht ist daher eine Korrektur

$$\{f, g\} = (-1)^{|X_f|} X_f \lrcorner X_g \lrcorner \Omega + d(\Psi(f, g, h)), \quad (4.34)$$

die den Defekt der Jacobi-Identität zum Verschwinden bringt. Natürlich stellt dies nicht den allgemeinsten Ansatz dar, da nicht jede geschlossene Form auf  $\mathcal{P}$  notwendig exakt ist. Es zeigt sich aber, daß der unten gefundene Zusatzterm genau von dieser Gestalt ist. Ein Blick auf das klassisch-mechanische Pendant (4.25) legt die Wahl

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \frac{1}{2} \left( -L_{X_g} f + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_g|+1)} L_{X_f} g \right) \\ &= (-1)^{|X_f|} X_f \lrcorner X_g \lrcorner \Omega + \frac{1}{2} d \left( -X_g \lrcorner f + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_g|+1)} X_f \lrcorner g \right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

nahe, denn die so eingeführten Vorzeichen sichern die gradierte Antisymmetrie. Der Faktor  $\frac{1}{2}$  – er ist nötig, um einen sonst vorhandenen Faktor vor dem  $\Omega$ -Term zu beseitigen – erweist sich jedoch als störend; ohne ihn würde dieser Ansatz mit (4.21) zur Jacobi-Identität führen. Unter Verwendung der in Abschnitt 3.1.2 eingeführten kanonischen Form  $\Theta$ , die bekanntermaßen  $d\Theta = -\Omega$  erfüllt, läßt sich der unerwünschte Faktor 2 jedoch auf andere Weise korrigieren. Setzt man nämlich

$$\{f, g\} = -L_{X_f}g + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_g|+1)}L_{X_g}f + (-1)^{|X_g|+1}L_{X_g \wedge X_f}\Theta, \quad (4.36)$$

so ergibt sich nach kurzer Rechnung die gewünschte Form:

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= -L_{X_f}g + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_g|+1)}L_{X_g}f + (-1)^{|X_g|+1}L_{X_g \wedge X_f}\Theta \\ &= -dX_f \lrcorner g + (-1)^{|X_f|}X_f \lrcorner g + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_g|+1)}dX_g \lrcorner f + (-1)^{|X_f|(|X_g|+1)}X_g \lrcorner df \\ &\quad + (-1)^{|X_g|+1}dX_f \lrcorner X_g \lrcorner \Theta + (-1)^{|X_f|+1}X_f \lrcorner X_g \lrcorner \Omega \\ &= (-1)^{|X_f|}X_f \lrcorner X_g \lrcorner \Omega + d\left(-X_f \lrcorner g + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_g|+1)}X_g \lrcorner f + (-1)^{|X_g|+1}X_f \lrcorner X_g \lrcorner \Theta\right). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Die letzte Zeile — allerdings in der Einschränkung auf Hamiltonsche  $(n-1)$ -Formen  $f, g$  und also auf gewöhnliche Hamiltonsche Vektorfelder  $|X_f| = |X_g| = 1$  — findet sich schon in einer Arbeit von FORGER und RÖMER ([25]), und in einer unveröffentlichten Notiz beider Autoren wird die Jacobi-Identität für diesen Spezialfall bewiesen.

### 4.3.2 Poissonsche Formen und Wohldefiniertheit

Bevor wir den Beweis der gradierten Jacobi-Identität für den obigen Ausdruck präsentieren, müssen wir uns zunächst dem Problem der Wohldefiniertheit zuwenden, welches bereits von FORGER und RÖMER ([25]) angesprochen wurde. Darunter versteht man, daß zu einer Hamiltonschen Form im allgemeinen mehrere Hamiltonsche Multivektorfelder assoziiert sind. Es bleibt demnach zu zeigen, daß die Definition der Klammer (4.36) unabhängig von der konkreten Wahl der Multivektorfelder ist. Dies wird sicher nicht für alle Hamiltonschen Formen der Fall sein; wir werden uns deshalb auf einen Unterraum einschränken müssen, dessen Elemente wir als Poissonsche Formen bezeichnen wollen. Diese Untersuchung steht insofern vor einem Nachweis der Jacobi-Identität, als wir dort die Beziehung

$$X_{\{f, g\}} \lrcorner h = ([X_g, X_f]) \lrcorner h \quad (4.38)$$

für (zulässige) Hamiltonsche Formen  $f, g, h$  benutzen wollen. Die Gleichheit beider Multivektorfelder ist aber nur bei Kontraktion mit der multisymplektischen  $(n+1)$ -Form  $\Omega$  gesichert, die wiederum einen großen Kern — als Unterraum in  $\Lambda^\bullet \mathfrak{X}(\mathcal{P})$  — aufweist.

Naheliegender ist es demnach, nur solche Hamiltonsche Formen zu betrachten, deren Multivektor-Kern denjenigen von  $\Omega$  enthält.

**Definition 4.3.1** *Eine Hamiltonschen Form  $f$  auf dem erweiterten multisymplektischen Phasenraum  $\mathcal{P}$  heißt Poissonsche Form<sup>1</sup>, wenn der Kern der multisymplektischen Form  $\Omega$  Teilraum ihres Kernes ist, d.h. wenn die Einsetzungsabbildung zu jedem Multivektorfeld  $X$  auf  $\mathcal{P}$ , dessen Kontraktion mit  $\Omega$  verschwindet, die Form  $f$  auf 0 abbildet. In Formeln*

$$\forall X \in \Lambda^\bullet \mathfrak{X}(\mathcal{P}) : \{X \lrcorner \Omega = 0 \Rightarrow X \lrcorner f = 0\}. \quad (4.39)$$

Ferner sei  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$  der Raum aller Poissonschen Formen.

<sup>1</sup>Der Name für diesen Begriff geht auf einen Vorschlag von M. FORGER zurück.

Mit der folgenden Beobachtung wird die Klammer zweier zulässiger Hamiltonscher Formen wohldefiniert.

**Lemma 4.3.2** *Für alle Multivektorfelder  $X \in \Lambda^\bullet \mathfrak{X}(\mathcal{P})$  gilt:*

$$X \lrcorner \Omega = 0 \Rightarrow X \lrcorner \Theta = 0. \quad (4.40)$$

BEWEIS. Es genügt, diese Eigenschaft für solche Multivektorfelder zu zeigen, deren Tensorgrad mit dem Formengrad  $|\Theta| = n$  von  $\Theta$  übereinstimmt. Ist nämlich  $Y$  ein Multivektorfeld von kleinerem Grad aus dem Kern von  $\Omega$ , so gilt für alle Multivektorfelder  $Z$  mit  $|Z \wedge Y| = n = |\Theta|$

$$(Y \wedge Z) \lrcorner \Omega = Z \lrcorner Y \lrcorner \Omega = 0 \quad (4.41)$$

und also mit dem Bestehen von (4.40) für  $n$ -Vektorfelder

$$0 = (Y \wedge Z) \lrcorner \Theta = Z \lrcorner (Y \lrcorner \Theta). \quad (4.42)$$

Da  $Z$  beliebig war, folgt  $Y \lrcorner \Theta = 0$ .

Sei nun  $X$  ein Multivektorfeld aus dem Kern von  $\Omega$  mit  $|X| = n$ . In lokalen Koordinaten von  $\mathcal{P}$  ist  $X$  von der Gestalt

$$X = \frac{1}{n!} X^{\mu_1 \dots \mu_n} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} + \frac{1}{(n+1)!} X^{A \mu_1 \dots \mu_{n-1}} \partial_A \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{n-1}} + \dots, \quad (4.43)$$

wobei die letzten Punkte für diejenigen Komponenten von  $X$  stehen, die bei Kontraktion mit  $\Theta$ ,

$$\Theta_{(x,v,\vec{p},p)} = p_A^\mu dv^A \wedge d_\mu x + p d^n x, \quad (4.44)$$

ohnehin verschwinden.

Die Kontraktion von  $X$  mit  $\Omega$  ergibt somit

$$X \lrcorner \Omega = (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} X^{\mu_1 \dots \mu_n} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} dp + (-1)^n \frac{1}{(n-1)!} X^{A \mu_1 \dots \mu_{n-1}} \varepsilon_{v \mu_1 \dots \mu_{n-1}} dp_A^v + \dots \quad (4.45)$$

Die hier unterdrückten Terme enthalten weder  $dp$  noch  $dp_A^v$ . Es folgt, daß beide Summanden der Koordinatengestalt von  $X$  verschwinden müssen. Damit ergibt sich aber auch die Kontraktion  $X \lrcorner \Theta$  zu Null.  $\square$

Der Begriff der Poissonschen Form ist sicherlich für unsere Zwecke nur dann brauchbar, wenn die Verknüpfung zweier Elemente aus  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$  wieder zulässig, also Poissonsches ist. Dies klärt der folgende Satz.

**Satz 4.3.3**  *$H_{\mathcal{P}}$  ist geschlossen unter der Poisson-Lie-Klammer (4.36), d.h.*

$$f, g \in H_{\mathcal{P}} \Rightarrow \{f, g\} \in H_{\mathcal{P}}. \quad (4.46)$$

Zum Beweise des Satzes benötigen wir einige Beobachtungen.

**Lemma 4.3.4** *Es seien im folgenden  $X$  ein Hamiltonsches Multivektorfeld,  $f$  eine zulässige Hamiltonsche Form und  $Y$  ein Multivektorfeld aus dem Kern von  $\Omega$ . Es gilt*

$$L_Y \Omega = 0, \quad (4.47)$$

$$L_Y f = 0, \quad (4.48)$$

$$([X, Y]) \lrcorner \Omega = 0, \quad (4.49)$$

$$L_Y \Theta = 0. \quad (4.50)$$

Die erste Gleichung folgt aus der Geschlossenheit von  $\Omega$ , die zweite aus  $Y \lrcorner df = Y \lrcorner X_f \lrcorner \Omega = 0$ , die dritte aus

$$\begin{aligned} ([X, Y]) \lrcorner \Omega &= (-1)^{(|X|+1)|Y|} (L_X Y) \lrcorner \Omega \\ &= (-1)^{(|X|+1)|Y|} L_X (Y \lrcorner \Omega) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.51)$$

während die vierte eine unmittelbare Konsequenz aus  $d\Theta = -\Omega$  ist:

$$L_Y \Theta = dY \lrcorner \Theta + (-1)^{|Y|} Y \lrcorner \Omega = 0. \quad (4.52)$$

BEWEIS DES SATZES. Zu zeigen ist, daß ein beliebiges Element  $X$  aus dem Kern von  $\Omega$  die Hamiltonsche Form  $\{f, g\}$  anihiliert. Für den ersten der vier Terme in der letzten Zeile von (4.37) gilt dies offensichtlich, und für die beiden mittleren berechnet man

$$\begin{aligned} X \lrcorner d(X_g \lrcorner f) &= X \lrcorner d(X_g \lrcorner f) + (-1)^{(|X|+1)} dX \lrcorner X_g \lrcorner f \\ &= L_X (X_g \lrcorner f) \\ &= (L_X X_g) \lrcorner f + (-1)^{(|X|+1)|X_g|} X_g \lrcorner L_X f \\ &= (-1)^{(|X|+1)|X_g|} ([X, X_g]) \lrcorner f \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Bei der Kontraktion des gewählten Multivektorfeldes  $X$  mit dem letzten Term ergibt sich schließlich unter Benutzung der Eigenschaften (4.40), (4.49) und (4.50)

$$\begin{aligned} X \lrcorner dX_f \lrcorner X_g \lrcorner \Theta &= L_X X_f \lrcorner X_g \lrcorner \Theta \\ &= (-1)^{(|X|+1)|X_f|} ([X, X_f]) \lrcorner X_g \lrcorner \Theta + (-1)^{(|X|+1)|X_f|} X_f \lrcorner L_X X_g \lrcorner \Theta \\ &= (-1)^{(|X|+1)(|X_f|+|X_g|)} X_f \lrcorner [X, X_g] \lrcorner \Theta + (-1)^{(|X|+1)(|X_f|+|X_g|)} X_f \lrcorner X_g \lrcorner L_X \Theta \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

### Beispiele Poissonscher Formen

BEISPIEL 1. Jede  $\text{pr}_{\mathcal{M}\mathcal{P}}$ -horizontale Hamiltonsche Form ist Poissonscher. Da die Hamiltonschen Vektorfelder  $\text{pr}_{\mathcal{M}\mathcal{P}}$ -horizontaler Formen vertikal sind, ist das Resultat der Verknüpfung zweier derartiger Formen wieder horizontal. Die Korrekturterme zum naiven Ansatz (4.30) verschwinden hier, ebenso wie der Defekt der Jacobi-Identität im naiven Ansatz (4.30). Wir werden im folgenden Abschnitt untersuchen, wie sich mit diesem Unterraum der Hamiltonschen Formen der KANATCHIKOVsche Zugang ([38, 39]) verstehen läßt.

BEISPIEL 2. Ist  $X \in \Lambda^\bullet \mathfrak{X}(\mathcal{P})$  ein Multivektorfeld, dessen Lie-Ableitung auf  $\Theta$  verschwindet,

$$L_X \Theta = 0, \quad (4.55)$$

so stellt  $(-1)^{|X|+1} X \lrcorner \Theta$  eine Poissonsche Hamiltonsche Form dar. Im Abschnitt 3.5 hatten wir nachgewiesen, daß die zu infinitesimalen Symmetrieoperationen auf  $\mathcal{E}$  gehörenden, auf  $\mathcal{P}$  gehobenen Vektorfelder  $\xi_{\mathcal{P}}$  speziell kanonisch sind und also obige Gleichung erfüllen.

Hat man nun mit  $X$  und  $Y$  zwei kommutierende Multivektorfelder zur Hand, deren Lieableitung auf  $\Theta$  verschwindet, so gilt für das antisymmetrische Tensorprodukt  $X \wedge Y$

$$\begin{aligned}
L_{X \wedge Y} \Theta &= dY \lrcorner X \lrcorner \Theta + (-1)^{|Y|+|X|-1} Y \lrcorner X \lrcorner d\Theta \\
&= dY \lrcorner X \lrcorner \Theta + (-1)^{|Y|-1} Y \lrcorner dX \lrcorner \Theta \\
&\quad + (-1)^{|Y|} Y \lrcorner dX \lrcorner \Theta + (-1)^{|Y|+|X|-1} Y \lrcorner X \lrcorner d\Theta \\
&= L_Y(X \lrcorner \Theta) + (-1)^{|Y|} Y \lrcorner L_X \Theta \\
&= (L_Y X) \lrcorner \Theta + (-1)^{|X|(|Y|-1)} X \lrcorner L_Y \Theta \\
&= (-1)^{(|X|-1)|Y|} ([X, Y]) \lrcorner \Theta \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

$(-1)^{|X|+|Y|+1} X \wedge Y \lrcorner \Theta$  fällt in diesem Fall also auch in die Beispielklasse. Insbesondere lassen sich damit aus den speziell kanonischen Vektorfeldern auch allgemeinere Beispiele konstruieren.

Wie die folgende Rechnung zeigt, ist auch diese Beispielklasse abgeschlossen unter der Poissonklammer. Sind  $X$  und  $Y$  zwei derartige Multivektorfelder und  $\mathcal{I}(X) = (-1)^{|X|+1} X \lrcorner \Theta$  bzw.  $\mathcal{I}(Y) = (-1)^{|Y|+1} Y \lrcorner \Theta$  zugehörige Hamiltonsche Formen, so ergibt eine kurze Rechnung

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{I}(X), \mathcal{I}(Y)\} &= (-1)^{|X|} X \lrcorner Y \lrcorner \Omega + (-1)^{|Y|} dX \lrcorner Y \lrcorner \Theta \\
&\quad + (-1)^{(|X|+1)|Y|} dY \lrcorner X \lrcorner \Theta + (-1)^{|Y|+1} dX \lrcorner Y \lrcorner \Theta \\
&= (-1)^{|X|+|Y|+1} X \lrcorner dY \lrcorner \Theta + (-1)^{|Y|+1} dX \lrcorner Y \lrcorner \Theta \\
&= (-1)^{|Y|} (L_X Y) \lrcorner \Theta \\
&= (-1)^{|X|+|Y|} [Y, X] \lrcorner \Theta \\
&= \mathcal{I}([Y, X]).
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Auch hier erhält man mit der neuen Poissonklammer eine Verbesserung gegenüber dem bisherigen Resultat ([32], (4C.9)), in dem diese Identität nur bis auf einen exakten Term aufgestellt werden konnte. MANGIAROTTI und SARDANASHVILY [53] *definieren* eine Klammer-Operation zweier Funktionen des Typs  $\mathcal{I}(\xi)$  durch das hier errechnete Resultat und stellen die Frage nach einer Ausdehnung auf beliebige (Hamiltonsche) Formen, die wir hiermit beantworten können. Schließlich sei noch die Arbeit von GÜNTHER, [36], erwähnt, in der für die  $(n-1)$ -Formen der Gestalt  $\mathcal{I}(\xi)$  (allerdings dort als  $\mathbb{R}^4$ -wertige Funktionen) und Funktionen auf  $\mathcal{E}$  die hier berechneten Regeln zur Definition genommen werden. Offensichtlich ist nämlich die Klammer einer Form  $\mathcal{I}(\xi)$  und einer Funktion  $h$  gleich der Ableitung von  $h$  in Richtung  $\xi_{\mathcal{P}}$ ,

$$\{h, \mathcal{I}(\xi)\} = \xi_{\mathcal{P}} \lrcorner dh = \xi_{\mathcal{P}}(h), \tag{4.58}$$

während die Klammer zweier Funktionen aus Gradierungsgründen verschwindet.

### Hamiltonsche und Poissonsche Formen

Nach der Beobachtung, daß der Kern der multisymplektischen Form  $\Omega$  in dem des Potentials  $\Theta$  enthalten ist, stellt sich die Frage, ob man immer ein beliebig gegebenes Potential zu einer gegebenen exakten Form derart abändern kann, daß die festgestellte Eigenschaft (4.40) gilt.

Ferner wirft die Definition der zulässigen Hamiltonschen Formen die Frage auf, ob jede beliebige Hamiltonsche Form durch Addition einer geschlossenen Form auf eine zulässige gebracht werden

kann.

Beide Frage sind im allgemeinen zu verneinen, wie das folgende Beispiel<sup>2</sup> zeigt.

Wir betrachten das komplexe Hopfbündel  $(S^3, S^2, U(1))$  mit der kanonischen  $U(1)$ -Wirkung auf  $S^3$ , aufgefaßt als Einheitssphäre in  $\mathbb{C}^2$ . Da die Lie-Algebra zu  $U(1)$   $i\mathbb{R}$  ist, können wir die kanonische Zusammenhangsform  $\omega$  als 1-Form auf  $S^3$  interpretieren. Das fundamentale Vektorfeld  $\xi$  zur Gruppenaktion erfüllt

$$\xi \lrcorner \omega = 1, \quad \xi \lrcorner (d\omega) = 0,$$

da  $d\omega$  die Krümmung zu  $\omega$  ist. Der Kern von  $\omega$  enthält also *nicht* den Kern von  $d\omega$ . Denkt man sich  $S^3$  als alle Punkte in  $\mathbb{C}^2$ , deren Länge gleich 1 ist, so kann man lokale Koordinaten

$$[0, 2\pi)^2 \times [0, \pi) \ni (\chi, \varphi, \theta) \mapsto (e^{\frac{i}{2}(\chi+\varphi)} \cos \frac{\theta}{2}, e^{\frac{i}{2}(\chi-\varphi)} \sin \frac{\theta}{2}),$$

verwenden, in denen  $U(1)$  additiv auf der  $\chi$ -Koordinate operiert. In diesen findet man

$$\omega = \frac{i}{2}d\chi + \frac{i}{2}\cos\theta d\varphi, \quad \xi = -2i\frac{\partial}{\partial\chi}, \quad d\omega = -\frac{i}{2}\sin\theta d\theta d\varphi.$$

Dem oben aufgeworfenen Problem entspricht die Frage, ob  $\omega$  um eine geschlossene 1-Form  $\alpha$  derart abgeändert werden kann, daß der Kern des so entstandenen Potentials  $\omega + \alpha$  den von  $d\omega$  umfaßt. Nun ist  $S^3$  einfach zusammenhängend, weshalb jede geschlossene 1-Form das Differential einer Funktion ist. Gesucht ist also eine Funktion  $\beta$ ,  $d\beta = \alpha$ , die mindestens

$$\xi \lrcorner d\beta = -1$$

genügt, denn  $\xi$  war ja im Kern von  $d\omega$ . Auf  $S^3$  – einer kompakten Mannigfaltigkeit – nimmt aber jede Funktion sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum an, weshalb das äußere Differential von  $\beta$  an mindestens zwei Stellen verschwinden muß. Dort läßt sich also die gewünschte Eigenschaft nicht einstellen.

Obwohl also vorläufig kein nichttriviales<sup>3</sup> Beispiel für eine Hamiltonsche Form, die nicht Poissonsche ist, vorliegt, zeigt dieses Beispiel, daß es sich um eine nichttriviale Begriffsbildung handelt.

### 4.3.3 Beweis der Jacobi-Identität

**Satz 4.3.5** *Es seien  $f, g, h \in \mathcal{H}_{\mathcal{P}}$  (im Formengrad homogene) Poissonsche Formen auf  $\mathcal{P}$ . Dann erfüllt die Abbildung*

$$\{f, g\} = -L_{X_g}f + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_g|+1)}L_{X_f}g + (-1)^{|X_g|+1}L_{X_g \wedge X_f}\Theta, \quad (4.59)$$

wobei  $|X_f|$  den Tensorgrad der zu  $f$  gehörigen Hamiltonschen Vektorfelder bezeichnet, die gradierte Jacobi-Identität

$$(-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)}\{f, \{g, h\}\} + \text{zykl. Vert.} = 0. \quad (4.60)$$

<sup>2</sup>Ich danke in diesem Zusammenhang M. BORDEMANN, von dem ich dieses Beispiel gelernt habe.

<sup>3</sup>Natürlich ist jede geschlossene Form nicht notwendig Poissonsche, aber doch Hamiltonsch.

BEWEIS. Wir berechnen zunächst einen Summanden aus der zyklischen Summe der Jacobi-Identität (man beachte  $|X_{\{f,g\}}| = |X_f| + |X_g| - 1$ ),

$$\begin{aligned}
& (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)} \{f, \{g, h\}\} \\
&= (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+1} L_{X_f} \{g, h\} + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)} (-1)^{(|X_f|+1)(|X_g|+|X_h|)} L_{X_{\{g,h\}}} f \\
&\quad + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)} (-1)^{|X_g|+|X_h|} L_{X_{\{g,h\}} \wedge X_f} \Theta \\
&= (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+1} L_{X_f} \left( -L_{X_g} h + (-1)^{(|X_g|+1)(|X_h|+1)} L_{X_h} g + (-1)^{|X_h|+1} L_{X_h \wedge X_g} \Theta \right) \\
&\quad + (-1)^{(|X_f|+1)|X_g|+|X_f|+1} L_{[X_h, X_g]} f + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+|X_g|+|X_h|} L_{[X_h, X_g] \wedge X_f} \Theta \\
&= (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)} L_{X_f} L_{X_g} h + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+1} L_{X_f} L_{X_h} g \\
&\quad + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_g|+1)} L_{[X_h, X_g]} f \\
&\quad + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+|X_h|} L_{X_f} L_{X_h \wedge X_g} \Theta + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+|X_h|+|X_g|} L_{[X_h, X_g] \wedge X_f} \Theta.
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Die zyklische Summe aller derjenigen Terme, die nicht  $\Theta$  enthalten, verschwindet nun als Konsequenz der Beziehung (4.21):

$$\begin{aligned}
& (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)} L_{X_f} L_{X_g} h + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_g|+1)(|X_h|+1)+1} L_{X_f} L_{X_h} g + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_g|+1)} L_{[X_h, X_g]} f \\
&\quad + \text{zykl. Vert.} \\
&= (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)} L_{X_f} L_{X_g} h + (-1)^{(|X_g|+|X_h|)(|X_f|+1)+1} L_{X_g} L_{X_f} h + (-1)^{(|X_h|+1)(|X_f|+1)} L_{[X_g, X_f]} h \\
&\quad + \text{zykl. Vert.} \\
&= (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)} \left( L_{X_f} L_{X_g} h - (-1)^{(|X_g|+1)(|X_f|+1)} L_{X_g} L_{X_f} h + L_{[X_g, X_f]} h \right) \\
&\quad + \text{zykl. Vert.} \\
&= (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)} \left( L_{X_f} L_{X_g} h - (-1)^{(|X_g|+1)(|X_f|+1)} L_{X_g} L_{X_f} h - (-1)^{(|X_f|+1)(|X_g|+1)} L_{[X_f, X_g]} h \right) \\
&\quad + \text{zykl. Vert.} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Es bleibt damit, das Verschwinden der  $\Theta$  enthaltenden Korrekturterme in der zyklischen Summe nachzuweisen. Hierzu benötigen wir das Ergebnis der folgenden Überlegung.

Da die Multivektorfelder eine gradierte Jacobi-Identität (4.7) erfüllen, folgt

$$(-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)} [X_f, [X_g, X_h]] \lrcorner \Theta + \text{zykl. Vert.} = 0. \tag{4.63}$$

Die linke Seite dieser Gleichung läßt sich aber wie folgt umformen.

$$\begin{aligned}
& (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)} [X_f, [X_g, X_h]] \lrcorner \Theta \\
&= (-1)^{(|X_f|+1)|X_g|} L_{X_f} ([X_g, X_h] \lrcorner \Theta) + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+1} [X_g, X_h] \lrcorner L_{X_f} \Theta \\
&= (-1)^{(|X_f|+1)|X_g|+1+|X_g|+1} L_{X_f} L_{X_g} (X_h \lrcorner \Theta) + (-1)^{(|X_f|+1)|X_g|+1} L_{X_f} (X_h \lrcorner L_{X_g} \Theta) \\
&\quad + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+1+1+|X_g|+1} L_{X_g} (X_h \lrcorner L_{X_f} \Theta) + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)} X_h \lrcorner L_{X_g} L_{X_f} \Theta
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= (-1)^{|X_f||X_g|+|X_g||X_h|+|X_g|+|X_h|} dX_f \lrcorner dX_g \lrcorner X_h \lrcorner \Theta + (-1)^{|X_f||X_g|+|X_g||X_h|+|X_h|+1} dX_f \lrcorner X_g \lrcorner dX_h \lrcorner \Theta \\
&\quad + (-1)^{|X_f||X_g|+|X_g||X_h|+|X_h|+|X_f|} X_f \lrcorner dX_g \lrcorner dX_h \lrcorner \Theta + (-1)^{|X_f||X_g|+|X_g|+1} dX_f \lrcorner X_h \lrcorner dX_g \lrcorner \Theta \\
&\quad + (-1)^{|X_f||X_g|+|X_g|+|X_f|} X_f \lrcorner dX_h \lrcorner dX_g \lrcorner \Theta + (-1)^{|X_f||X_g|+|X_f|+1} X_f \lrcorner dX_h \lrcorner X_g \lrcorner d\Theta \\
&\quad + (-1)^{|X_f||X_g|} dX_f \lrcorner X_h \lrcorner X_g \lrcorner d\Theta + (-1)^{|X_f||X_h|+|X_g||X_h|+|X_f|} dX_g \lrcorner X_h \lrcorner dX_f \lrcorner \Theta \\
&\quad + (-1)^{|X_f||X_h|+|X_g||X_h|+|X_g|+|X_f|+1} X_g \lrcorner dX_h \lrcorner dX_f \lrcorner \Theta \\
&\quad + (-1)^{|X_f||X_h|+|X_g||X_h|+1} dX_g \lrcorner X_h \lrcorner X_f \lrcorner d\Theta + (-1)^{|X_f||X_h|+|X_g||X_h|+|X_g|} X_g \lrcorner dX_h \lrcorner X_f \lrcorner d\Theta \\
&\quad + (-1)^{|X_f||X_h|+|X_h|+|X_f|+1} X_h \lrcorner dX_g \lrcorner dX_f \lrcorner \Theta + (-1)^{|X_f||X_h|+|X_h|} X_h \lrcorner dX_g \lrcorner X_f \lrcorner d\Theta.
\end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt, daß  $X_f \lrcorner d\Theta$  geschlossen ist.

Unter der zyklischen Summe treten die paarweise gekennzeichneten Terme jeweils genau einmal mit dem gegensätzlichen Vorzeichen auf, so daß nach der Summation alle unterklammerten Beiträge wegfallen. Wir erhalten demnach insgesamt

$$\begin{aligned}
0 &= (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)} [X_f, [X_g, X_h]] \lrcorner \Theta + \text{zykl. Vert.} \\
&= (-1)^{|X_f||X_g|+|X_g||X_h|+|X_g|+|X_h|} dX_f \lrcorner dX_g \lrcorner X_h \lrcorner \Theta + (-1)^{|X_f||X_g|+|X_g|+1} dX_f \lrcorner X_h \lrcorner dX_g \lrcorner \Theta \\
&\quad + (-1)^{|X_f||X_h|+|X_g||X_h|+|X_g|} X_g \lrcorner dX_h \lrcorner X_f \lrcorner d\Theta + \text{zykl. Vert.}
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Wenden wir uns nun wieder den Termen der letzten Zeile in (4.61) zu, die  $\Theta$  enthalten. Wie wir nach einigen Umformungsschritten sehen werden, ist deren zyklische Summe ein Vielfaches des eben erhaltenen Ausdrucks und verschwindet demnach ebenfalls. Konkret ergibt sich

$$\begin{aligned}
&(-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+|X_h|} L_{X_f} L_{X_h} \wedge X_g \lrcorner \Theta + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+|X_h|+|X_g|} L_{[X_h, X_g]} \wedge X_f \lrcorner \Theta \\
&= (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+|X_h|} dX_f \lrcorner dX_g \lrcorner X_h \lrcorner \Theta + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+|X_g|+1} dX_f \lrcorner X_g \lrcorner X_h \lrcorner d\Theta \\
&\quad + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+|X_g|+|X_f|} X_f \lrcorner dX_g \lrcorner X_h \lrcorner d\Theta \\
&\quad + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+|X_g|+|X_h|} dX_f \lrcorner [X_h, X_g] \lrcorner \Theta + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+|X_f|} X_f \lrcorner [X_h, X_g] \lrcorner d\Theta \\
&= (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+|X_h|} dX_f \lrcorner dX_g \lrcorner X_h \lrcorner \Theta + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+|X_g|+1} dX_f \lrcorner X_g \lrcorner X_h \lrcorner d\Theta \\
&\quad + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+|X_g|+|X_f|} X_f \lrcorner dX_g \lrcorner X_h \lrcorner d\Theta \\
&\quad + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+|X_g|+|X_h|+(|X_h|+1)|X_g|} dX_f \lrcorner L_{X_h} X_g \lrcorner \Theta \\
&\quad + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+|X_g|+|X_h|+1} dX_f \lrcorner X_g \lrcorner L_{X_h} \lrcorner \Theta \\
&\quad + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+|X_f|+(|X_h|+1)|X_g|} X_f \lrcorner L_{X_h} X_g \lrcorner d\Theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+|X_h|} dX_f \lrcorner dX_g \lrcorner X_h \lrcorner \Theta + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+|X_g|+1} dX_f \lrcorner X_g \lrcorner X_h \lrcorner d\Theta \\
&\quad + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+|X_g|+|X_f|} X_f \lrcorner dX_g \lrcorner X_h \lrcorner d\Theta \\
&\quad + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+(|X_h|+1)|X_g|} dX_f \lrcorner dX_h \lrcorner X_g \lrcorner \Theta \\
&\quad + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+|X_h||X_g|+1} dX_f \lrcorner X_h \lrcorner dX_g \lrcorner \Theta \\
&\quad + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+|X_g|+|X_h|+1} dX_f \lrcorner X_g \lrcorner dX_h \lrcorner \Theta \\
&\quad + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+|X_g|} dX_f \lrcorner X_g \lrcorner X_h \lrcorner d\Theta \\
&\quad + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+|X_f|+|X_g||X_h|+|X_g|} X_f \lrcorner dX_h \lrcorner X_g \lrcorner d\Theta \\
&= (-1)^{|X_f|+|X_f||X_h|+1} dX_f \lrcorner dX_g \lrcorner X_h \lrcorner \Theta + (-1)^{|X_f||X_h|+|X_g|+|X_h|+1} X_f \lrcorner dX_g \lrcorner X_h \lrcorner d\Theta \\
&\quad + (-1)^{|X_f||X_h|+|X_g||X_h|+|X_f|+1} dX_f \lrcorner dX_h \lrcorner X_g \lrcorner \Theta \\
&\quad + (-1)^{|X_f||X_h|+|X_g||X_h|+|X_f|+|X_h|} dX_f \lrcorner X_h \lrcorner dX_g \lrcorner \Theta \\
&\quad + (-1)^{|X_f||X_h|+|X_f|+|X_g|} dX_f \lrcorner X_g \lrcorner dX_h \lrcorner \Theta + (-1)^{|X_f||X_h|+|X_h||X_g|+|X_h|+|X_g|+1} X_f \lrcorner dX_h \lrcorner X_g \lrcorner d\Theta.
\end{aligned}$$

Wieder kann man die einzelnen Terme in der zyklischen Summe paarweise gruppieren, jedoch stimmen jetzt die Vorzeichen überein, so daß ein Faktor 2 entsteht:

$$\begin{aligned}
&(-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+|X_h|} L_{X_f} L_{X_h \wedge X_g} \Theta + (-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)+|X_h|+|X_g|} L_{[X_h, X_g] \wedge X_f} \Theta \\
&\quad + \text{zykl. Vert.} \\
&= 2 \left( (-1)^{|X_f|+|X_f||X_h|+1} dX_f \lrcorner dX_g \lrcorner X_h \lrcorner \Theta + (-1)^{|X_f||X_h|+|X_h||X_g|+|X_h|+|X_g|+1} X_f \lrcorner dX_h \lrcorner X_g \lrcorner d\Theta \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{|X_f||X_h|+|X_f|+|X_g|} dX_f \lrcorner X_g \lrcorner dX_h \lrcorner \Theta \right) + \text{zykl. Vert.} \\
&= 2(-1)^{|X_f||X_g|+|X_f||X_h|+|X_g||X_h|+|X_f|+|X_g|+|X_h|+1} \left( (-1)^{|X_g|+|X_h|+|X_g||X_h|+|X_f||X_g|} dX_f \lrcorner dX_g \lrcorner X_h \lrcorner \Theta \right. \\
&\quad + (-1)^{|X_f|+|X_g||X_h|+|X_f||X_g|} X_f \lrcorner dX_g \lrcorner X_h \lrcorner d\Theta \\
&\quad \left. + (-1)^{|X_f||X_h|+|X_g||X_f|+|X_g|+1} dX_h \lrcorner X_f \lrcorner dX_g \lrcorner d\Theta \right) + \text{zykl. Vert.} \\
&= 2(-1)^{|X_f||X_g|+|X_f||X_h|+|X_g||X_h|+|X_f|+|X_g|+|X_h|+1} \left( (-1)^{|X_g|+|X_h|+|X_g||X_h|+|X_f||X_g|} dX_f \lrcorner dX_g \lrcorner X_h \lrcorner \Theta \right. \\
&\quad + (-1)^{|X_g|+|X_h||X_f|+|X_g||X_h|} X_g \lrcorner dX_h \lrcorner X_f \lrcorner d\Theta \\
&\quad \left. + (-1)^{|X_g||X_f|+|X_g|+1} dX_f \lrcorner X_h \lrcorner dX_g \lrcorner d\Theta \right) + \text{zykl. Vert.} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Damit ist der Beweis des Satzes geführt.  $\square$

#### 4.3.4 Die Kanatchikovsche Gerstenhaber-Algebra für horizontale Formen auf $\Pi$

In einer Reihe von Arbeiten konstruierte KANATCHIKOV ([38, 39]) auf dem Legendre-Bündel  $\Pi$  eine Super-Poisson-Lie-Klammer, indem er sich auf  $\text{pr}_{\mathcal{M}\Pi}$ -horizontale Hamiltonsche Formen beschränkte.

Die Verallgemeinerung der Konstruktion auf nichttriviale Bündelkonfigurationen verlangte nach der Wahl eines Zusammenhanges in  $\mathcal{E}$ , um überhaupt in konsistenter Weise die benötigten Objekte  $\Omega_{\bar{\Gamma}}$  und  $d_{\bar{\Gamma}}$ , vgl. Abschnitt 3.1.3, bereitzustellen ([63, 64]). Die auf diese Weise eingeführte Klammer hängt letztlich nicht von der Wahl des Zusammenhanges ab. Die Erklärung dafür soll im folgenden Abschnitt gegeben werden. Es zeigt sich nämlich, daß die Konstruktion nur eine Unterklasse der im vorigen Abschnitt eingeführten zulässigen Hamiltonschen Formen beschreibt. Nach Satz 3.4.3 wissen wir nämlich, daß die  $\text{pr}_{\mathcal{M}\mathcal{P}}$ -horizontalen Poissonschen Formen per Rückzug von Formen auf  $\Pi$  stammen. Umgekehrt lassen sich aus allen  $\text{pr}_{\mathcal{M}\Pi}$ -horizontalen Formen auf  $\Pi$ , die der Gleichung (3.57) genügen, als Poissonsche Formen auf  $\mathcal{P}$  interpretieren. Darüberhinaus sind nach den Ausführungen in Beispiel 1 aus Abschnitt 4.3.2 die  $\text{pr}_{\mathcal{M}\mathcal{P}}$ -horizontalen Poissonschen Formen geschlossen unter der Klammer  $\{, \}$ . Es liegt demnach nahe, die Einschränkung der Klammeroperation auf solche Formen mit dem KANATCHIKOVschen Formalismus zu vergleichen.

Um nun die Einbettung der KANATCHIKOVschen Lösung in den allgemeinen Rahmen formulieren zu können, seien hier zunächst die Eigenschaften dieser Struktur aufgeführt.

**Definition 4.3.6** *Es sei  $H_{\Pi}$  der Raum aller  $\text{pr}_{\mathcal{M}\Pi}$ -horizontalen Formen  $\tilde{f}$  auf  $\Pi$ , zu denen ein Multivektorfeld  $\tilde{X} \in \Lambda^{\bullet}\mathfrak{X}(\Pi)$  existiert, das*

$$\tilde{X} \lrcorner \Omega_{\bar{\Gamma}} = d_{\bar{\Gamma}} \tilde{f} \quad (4.66)$$

erfüllt.

BEMERKUNG. Nach Satz 3.4.3 ist  $H_{\Pi}$  isomorph zu dem Raum der  $\text{pr}_{\mathcal{M}\mathcal{P}}$ -horizontalen Poissonschen Formen auf  $\mathcal{P}$ , und jedes der Elemente  $\tilde{f}$  in  $H_{\Pi}$  ist von der speziellen Gestalt wie in Satz 3.4.2, mit der entsprechenden Interpretation der Symbole. Obwohl in (4.66) ein Zusammenhang  $\bar{\Gamma}$  auftaucht, ist doch  $H_{\Pi}$  unabhängig davon in dem Sinne, daß aus der Existenz eines Multivektorfeldes  $\tilde{X}$  zu  $\tilde{f}$  für ein  $\bar{\Gamma}$  die Existenz für jeden anderen Zusammenhang folgt.

**Satz 4.3.7** (KANATCHIKOV, [39]) *Die bilineare Abbildung*

$$H_{\Pi} \ni \tilde{f}, \tilde{g} \mapsto \{\tilde{f}, \tilde{g}\}_{\bar{\Gamma}} = (-1)^{|X_{\tilde{f}}|} X_{\tilde{f}} \lrcorner X_{\tilde{g}} \lrcorner \Omega_{\bar{\Gamma}} \in H_{\Pi}, \quad (4.67)$$

bei der  $X_{\tilde{f}}, X_{\tilde{g}} \in \Lambda^{\bullet}\mathfrak{X}(\Pi)$  zu  $\tilde{f}$  und  $\tilde{g}$  beigeordnete Multivektorfelder bezeichnen, ist wohldefiniert und hat die folgenden Eigenschaften ( $f, g, h \in H_{\Pi}$ ,  $\bar{\Gamma}, \bar{\Gamma}'$  zwei Zusammenhänge in  $\mathcal{E}$ ).

1.  $\{f, g\}_{\bar{\Gamma}} = -(-1)^{(|X_f|+1)(|X_g|+1)} \{g, f\}_{\bar{\Gamma}}$ ,
2.  $(-1)^{(|X_f|+1)(|X_h|+1)} \{f, \{g, h\}_{\bar{\Gamma}}\}_{\bar{\Gamma}} + (-1)^{(|X_g|+1)(|X_f|+1)} \{g, \{h, f\}_{\bar{\Gamma}}\}_{\bar{\Gamma}} + (-1)^{(|X_h|+1)(|X_g|+1)} \{h, \{f, g\}_{\bar{\Gamma}}\}_{\bar{\Gamma}} = 0$ ,
3.  $\{f, g\}_{\bar{\Gamma}} = \{f, g\}_{\bar{\Gamma}'}$ .

BEWEIS. Einen Beweis findet man zum Beispiel in [63]. Mit dem folgenden Satz ist obige Aussage eine Folgerung aus dem allgemeineren Satz 4.3.5.  $\square$

**Satz 4.3.8**  *$\text{pr}_{\Pi\mathcal{P}}^*$  ist ein Poisson-Morphismus von  $(\Pi, \{, \}_{\bar{\Gamma}})$  nach  $(\mathcal{P}, \{, \})$ , d.h. für zwei  $\text{pr}_{\mathcal{M}\Pi}$ -horizontale Hamiltonsche Formen  $\tilde{f}$  und  $\tilde{g}$  auf  $\Pi$  gilt*

$$\text{pr}_{\Pi\mathcal{P}}^* (\{\tilde{f}, \tilde{g}\}_{\bar{\Gamma}}) = \{(\text{pr}_{\Pi\mathcal{P}}^* \tilde{f}), (\text{pr}_{\Pi\mathcal{P}}^* \tilde{g})\} \quad (4.68)$$

BEWEIS. Nach Satz 3.4.3 sind  $f = \text{pr}_{\Pi\mathcal{P}}^* \tilde{f}$  und  $g = \text{pr}_{\Pi\mathcal{P}}^* \tilde{g}$  Poissonsche Formen auf  $\mathcal{P}$ . Es seien  $X$  und  $Y$  Hamiltonsche Multivektorfelder auf  $\mathcal{P}$  zu  $f$  und  $g$  sowie  $\tilde{X}$  und  $\tilde{Y}$  deren Projektionen auf  $\Pi$ , die nach 3.4.3 existieren. Da  $X$  und  $Y$  vertikal sind, ist  $X \lrcorner Y \lrcorner \Omega$  horizontal, ebenso wie  $\tilde{X} \lrcorner \tilde{Y} \lrcorner \Omega_{\bar{\Gamma}}$ . Eine Rechnung in Koordinaten zeigt

$$\text{pr}_{\Pi\mathcal{P}}^* (\tilde{X} \lrcorner \tilde{Y} \lrcorner \Omega_{\bar{\Gamma}}) = X \lrcorner Y \lrcorner \Omega. \quad (4.69)$$

Nun gilt aber

$$\tilde{X} \lrcorner \Omega_{\bar{\Gamma}} = d_{\bar{\Gamma}} \tilde{f} \text{ und } \tilde{Y} \lrcorner \Omega_{\bar{\Gamma}} = d_{\bar{\Gamma}} \tilde{g}, \quad (4.70)$$

woraus sich die Behauptung ergibt.  $\square$

### 4.3.5 Gerstenhaber-Struktur

Zeichnet man auf  $\mathcal{M}$  eine Volumenform aus, so hat man damit eine Hodge-\* -Operation auf Formen zur Hand. Diese läßt sich auf  $\text{pr}_{\mathcal{M}\mathcal{P}}$ -horizontale Formen auf  $\mathcal{P}$  übertragen und kann dort zur Definition eines Produktes herangezogen werden, welches eine vorzeichenbehaftete Leibniz-Regel bezüglich der Klammer (4.36) erfüllt.

Die Übertragung der \*-Operation auf  $\text{pr}_{\mathcal{M}\mathcal{P}}$ -horizontale Formen vollzieht sich dabei wie folgt. Es sei  $f$  eine solche Form,  $\mathbf{p}$  ein Punkt auf  $\mathcal{P}$ , der einen Punkt  $\mathbf{m}$  auf  $\mathcal{M}$  überlagert, und  $\varphi \in \Gamma_{\mathbf{m}}(\mathcal{P})$  ein lokaler Schnitt mit  $\varphi(\mathbf{m}) = \mathbf{p}$ . Wir definieren nun eine Form  $\tilde{f}$  auf  $\mathcal{P}$  punktweise durch

$$\tilde{f}(\mathbf{p}) = \text{pr}_{\mathcal{M}\mathcal{P}}^* (*(\varphi^*(f(\mathbf{p}))))). \quad (4.71)$$

Da  $f$  horizontal war, hängt das jeweilige Ergebnis nicht von der Wahl des Schnittes  $\varphi$  ab. Wir schreiben im folgenden kurz

$$\tilde{f} = *_{\mathcal{M}} f \quad (4.72)$$

offensichtlich ist  $*_{\mathcal{M}}$  invertierbar.

**Satz 4.3.9** *Das Produkt  $\bullet$ , definiert durch*

$$f \bullet g = *_{\mathcal{M}}^{-1} (*_{\mathcal{M}} f \wedge *_{\mathcal{M}} g) \quad (4.73)$$

*für beliebige  $\text{pr}_{\mathcal{M}\mathcal{P}}$ -horizontale Poissonsche Formen  $f, g \in H_{\mathcal{P}}$ , wobei  $*_{\mathcal{M}}$  die Hodge-Stern-Operation wie oben beschrieben auf horizontalen Formen auf  $\mathcal{P}$  bezeichnet, erfüllt die Super-Leibniz-Regel*

$$\{f, g \bullet h\} = (-1)^{(|X_f|+1)|X_h|} \{f, g\} \bullet h + g \bullet \{f, h\}. \quad (4.74)$$

BEWEIS. Wir führen den Beweis durch eine Rechnung in einem lokalen Koordinatensystem. Es seien zwei horizontale Poissonsche Formen

$$g = \frac{1}{s!} g^{\mu_1 \dots \mu_s} d_{\mu_1 \dots \mu_s} x, \text{ und } h = \frac{1}{t!} h^{\nu_1 \dots \nu_t} d_{\nu_1 \dots \nu_t} x \quad (4.75)$$

gegeben und  $X_f$  ein Hamiltonsches  $r$ -Vektorfeld zu einer dritten, ebenfalls horizontal Poissonschen Form  $f$ . Mit der Definition des Hodge-Sternes berechnet man leicht

$$d_{\mu_1 \dots \mu_s} x \bullet d_{\nu_1 \dots \nu_t} x = d_{\mu_1 \dots \mu_s \nu_1 \dots \nu_t} x. \quad (4.76)$$

Damit ergibt eine kurze Rechnung die behauptete Eigenschaft,

$$\begin{aligned}
\{f, g \bullet h\} &= (-1)^r X_f \lrcorner d(g \bullet h) \\
&= (-1)^r \frac{1}{s!} \frac{1}{t!} X_f \lrcorner \partial_a (g^{\mu_1 \dots \mu_s} h^{\nu_1 \dots \nu_t}) dp^a d_{\mu_1 \dots \mu_s \nu_1 \dots \nu_t} x \\
&= (-1)^r \frac{1}{(r-1)!} \frac{1}{s!} \frac{1}{t!} X_f^{a \lambda_1 \dots \lambda_{r-1}} \partial_a (g^{\mu_1 \dots \mu_s} h^{\nu_1 \dots \nu_t}) d_{\mu_1 \dots \mu_s \nu_1 \dots \nu_t \lambda_1 \dots \lambda_{r-1}} x \\
&\quad + (-1)^r \frac{1}{(r-1)!} \frac{1}{s!} \frac{1}{t!} X_f^{a \lambda_1 \dots \lambda_{r-1}} g^{\mu_1 \dots \mu_s} \partial_a (h^{\nu_1 \dots \nu_t}) d_{\mu_1 \dots \mu_s \nu_1 \dots \nu_t \lambda_1 \dots \lambda_{r-1}} x \\
&= (-1)^{(r-1)t} \{f, g\} \bullet h + g \bullet \{f, h\}.
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Dabei steht  $p^a$  kollektiv für die  $\text{pr}_{\mathcal{M}\mathcal{P}}$ -Faserkoordinaten  $v^A$ ,  $p_A^\mu$  und  $p$ .  $\square$

BEMERKUNGEN. Das Produkt  $\bullet$  ist vom Grade  $-n$ , d.h.  $f \bullet g$  ist eine  $(r + s - n)$ -Form, wenn  $f$  eine  $r$ -Form und  $g$  eine  $s$ -Form war. Dies ist verträglich mit der im Satz 3.4.2 festgestellten polynomialen Abhängigkeit der Koeffizientenfunktionen<sup>4</sup> horizontaler Poissonscher Formen. Diese waren für eine  $r$ -Form ein Polynom  $(n - r)$ -ter Ordnung in den Koordinaten  $p_A^\mu$ , und unter der Multiplikation  $\bullet$  adiiert sich der Polynomgrad.

Betrachtet man den Spezialfall  $n = 1$ , so ergeben sich als einzige Poissonsche Formen die Funktionen auf einem doppelt erweiterten Phasenraum. Das oben definierte Produkt ist aber für zwei solche Funktionen immer gleich Null und stellt somit *nicht* die kovariante Verallgemeinerung des punktweisen Produktes der klassischen Mechanik dar.

Die Gradierung des Produktes legt die Vermutung nahe, daß  $X \wedge Y$  ein Hamiltonsches Vektorfeld zu  $f \bullet g$  ist, wenn  $X$  zu  $f$  und  $Y$  zu  $g$  korrespondiert. Dies ist aber nicht der Fall:  $X \wedge Y$  ist nämlich immer 2-vertikal, also ist  $X \wedge Y \lrcorner \Omega$  horizontal und folglich auch  $d(f \bullet g)$ . Demnach müßte  $f \bullet g$  durch Rückzug aus einer Form auf  $\mathcal{M}$  hervorgegangen sein. Dies braucht aber im allgemeinen nicht der Fall zu sein, wie man am Beispiel der Hamiltonschen Formen  $\mathcal{I}(\xi)$  für vertikale Symmetrietransformationen  $\xi$  nach Abschnitt 3.5 sehen kann.

Natürlich stellt sich sofort die Frage nach der Möglichkeit einer Ausdehnung von  $\bullet$  auf die nicht-horizontalen Poissonsche Formen. Wir nehmen an, daß ein solches gegeben sei. Mit Hilfe dieses erweiterten Produktes ist man aber in der Lage, in jedem Punkt von  $\mathcal{P}$  einen Unterraum von  $T^*\mathcal{P}$  auszuzeichnen, der komplementär zu den  $\text{pr}_{\mathcal{M}\mathcal{P}}$ -horizontalen Kovektoren in diesem Punkt ist. Wir definieren

$$H_p^* \mathcal{P} = \{ \alpha \in T_p^* \mathcal{P} \mid \alpha \bullet \beta = 0 \text{ für alle } \text{pr}_{\mathcal{M}\mathcal{P}}\text{-horizontalen Poissonschen } (n-1)\text{-Formen } \beta \}. \tag{4.78}$$

Dies entspricht nun der Auszeichnung eines Zusammenhanges in  $\mathcal{P}$  und – unter Verwendung des kanonischen Nullschnittes in  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$  – eines ebensolchen in  $\mathcal{E}$ . Da aber ein Zusammenhang in  $\mathcal{E}$  nicht auf kanonisch Weise existiert, sondern eine zusätzliche Struktur darstellt, kann es keine natürliche Ausdehnung des Produktes  $\bullet$  auf beliebige Poissonsche Formen geben.

Mit den Überlegungen zur Gradierung des Produktes und der festgestellten polynomialen Abhängigkeit der Koeffizientenfunktionen der Poissonschen Formen stellt man fest, daß auch alternative Produkte  $\bullet'$  der Gradierungsbedingung

$$|f \bullet' g| \leq |f| + |g| - n \tag{4.79}$$

genügen müssen. Wendet man sich nun wieder der zeitabhängigen symplektischen Mechanik, also dem Fall  $n = 1$  zu, so stimmt ein etwa gefundenes Produkt  $\bullet'$  nie mit dem vorhandenen punktweisen Produkt überein.

<sup>4</sup>Eine analoge Rechnung wie im Beweis des Satzes 3.4.2 für allgemeine Poissonsche Formen führt auf eine gleiche  $p_A^\mu$ -Abhängigkeit der Koeffizientenfunktionen des horizontalen Anteils dieser Formen.

Zusammenfassend kann damit festgestellt werden, daß einem Produkt in der multisymplektischen Feldtheorie keine Rolle zukommt. Im Ausblick dieser Arbeit wird ein möglicher Ausweg aus dieser Situation skizziert.

## Kapitel 5

# Zusammenhang mit bekannten Strukturen für Feldtheorien

*Die kanonischen Strukturen der Feldtheorie erhält man durch Integration über eine Untermannigfaltigkeit der Basismannigfaltigkeit – in relativistischen Theorien ein raumartiges Gebiet – der mittels einer Lösung der Feldgleichungen zurückgezogenen multisymplektischen Objekte. Dazu muß die Basismannigfaltigkeit zerlegt werden. Dies soll hier anhand der feldtheoretischen Poisson-Klammern auf dem Raum der Anfangsbedingungen und des Energie-Impuls-Tensors illustriert werden.*

### 5.1 Kanonische symplektische Struktur auf dem Raum der Anfangskonfigurationen

Die kanonische Formulierung der Feldtheorie beginnt mit der Auszeichnung einer Richtung auf der Basismannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ , der Zeitrichtung. Komplementär dazu denkt man sich eine Untermannigfaltigkeit  $\Sigma$  von  $\mathcal{M}$  der Kodimension 1 gegeben, deren Normale in Zeitrichtung liegt. Die Felder, also Schnitte im auf  $\Sigma$  eingeschränkten Bündel  $\mathcal{P}$ , das im folgenden mit  $\mathcal{P}_\Sigma$  bezeichnet wird, entwickeln sich dann gemäß den Bewegungsgleichungen, wobei die zuvor ausgezeichnete Richtung den Entwicklungsparameter stellt. In Analogie zur klassischen Mechanik besteht nun der Phasenraum aus allen Anfangskonfigurationen auf  $\Sigma$ , die die Lösungen der Feldgleichungen vollständig charakterisieren, also im einfachsten Falle aus (glatten) Schnitten in  $\mathcal{P}_\Sigma$  mit kompaktem Träger. Da  $\Gamma(\mathcal{P}_\Sigma)$  keine endlichdimensionale Mannigfaltigkeit darstellt, ist die Definition des Tangentialbündels problematisch. Man wählt typischerweise als Tangentialraum an einen Schnitt  $\pi \in \Gamma(\mathcal{P}_\Sigma)$

$$T_\pi \mathcal{P}_\Sigma := \{X : \Sigma \mapsto \mathfrak{B}\mathcal{P}_\Sigma \mid X \text{ überlagert } \pi\}. \quad (5.1)$$

Mit den multisymplektischen Formen  $\Theta$  und  $\Omega$  existieren die kanonischen Formen  $\Theta_\Sigma$  und  $\Omega_\Sigma$  auf  $\mathcal{P}_\Sigma$ :

$$\Theta_\Sigma(\pi)(X) = \int_\Sigma \pi^*(X \lrcorner \Theta), \quad (5.2)$$

$$\Omega_\Sigma(\pi)(X, Y) = \int_\Sigma \pi^*(X \lrcorner Y \lrcorner \Omega). \quad (5.3)$$

Mit dem folgenden Lemma prüft man nach, daß  $\Omega_\Sigma$  in der Tat das Differential von  $\Theta_\Sigma$  darstellt.

**Lemma 5.1.1** *Es seien  $\pi \in \Gamma(\mathcal{P}_\Sigma)$ ,  $X, Y \in T_\pi \mathcal{P}_\Sigma$ . Dann gilt*

$$X(\Theta_\Sigma(Y))(\pi) = \int_\Sigma \pi^* L_X Y \lrcorner \Theta \quad (5.4)$$

BEWEIS. Es sei  $\Phi_t$  eine 1-Parameter-Gruppe von Bündeldiffeomorphismen von  $\mathcal{P}_\Sigma$ , deren Vektorfeld bei  $t = 0$  in der Einschränkung auf das Bild von  $\pi$  den Tangentiavektor  $X$  ergibt. Man berechnet nun

$$\begin{aligned} X(\Theta_\Sigma(Y))(\pi) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_\Sigma (\Phi_t \circ \pi)^* Y \lrcorner \Theta \\ &= \int_\Sigma \pi^* \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_t^* Y \lrcorner \Theta \\ &= \int_\Sigma \pi^* L_X Y \lrcorner \Theta. \end{aligned} \quad (5.5)$$

□

Damit ergibt sich

**Satz 5.1.2**

$$\begin{aligned} \Omega_\Sigma(\pi)(X, Y) &= X(\Theta_\Sigma(Y))(\pi) - Y(\Theta_\Sigma(X))(\pi) + \Theta_\Sigma(\pi)([X, Y]) \\ &= -(d\Theta_\Sigma)(\pi)(X, Y) \end{aligned} \quad (5.6)$$

BEWEIS. Dies folgt unter Verwendung des Stokesschen Satzes aus dem Lemma und der Definition  $d\Theta = -\Omega$ . □

Mit der symplektischen Struktur folgt nun die Definition der Observablen der Theorie auf dem Phasenraum  $\Gamma(\mathcal{P}_\Sigma)$ .

**Definition 5.1.3** *Eine Funktion  $F$  auf  $\Gamma(\mathcal{P}_\Sigma)$  der Form*

$$F(\pi) = \int_\Sigma \pi^*(f), \quad (5.7)$$

wobei  $\pi \in \Gamma(\mathcal{P}_\Sigma)$  und  $f \in \Omega^{n-1}(\mathcal{P})$ , heißt *Observable*, wenn ein Vektorfeld  $X_F$  auf  $\Gamma(\mathcal{P}_\Sigma)$  existiert, das für jedes Vektorfeld  $Y$  in jedem Punkt  $\pi$  die Gleichung

$$Y(F)_{(\pi)} = \Omega_\Sigma(\pi)(Y, X_F) \quad (5.8)$$

erfüllt.

Man überzeugt sich davon, daß in diesem Fall unter Verwendung einer Rechnung wie in Lemma 5.1.1

$$df = X_F \lrcorner \Omega \quad (5.9)$$

bestehen muß, wobei  $X_F$  im Sinne der Festlegung des Tangentialraumes  $T\Gamma(\mathcal{P}_\Sigma)$  als Vektorfeld auf  $\mathcal{P}_\Sigma$  zu deuten ist. Die Poisson-Klammer zweier Observablen  $F$  und  $G$  ist gegeben durch

$$\{F, G\}_{(\pi)} = \Omega_\Sigma(X_F, X_G)_{(\pi)} = \int_\Sigma \pi^* (\{f, g\}), \quad (5.10)$$

falls  $f$  und  $g$  Poissonsche Formen darstellen.

Die Definition der Observablen sowie die vorgestellte Klammer gehen zurück auf KIJOWSKI und SZCZYRBA, [46]. Für einfache Beispiele kann man zeigen, daß diese Struktur mit der auf PEIERLS zurückgehenden Klammer ([67, 55, 56]) übereinstimmt, [71].



## 5.2 Kanonische Konstruktion des Energie-Impulstensors

Im Kapitel 3.5 haben wir die Einbindung infinitesimaler Symmetrioperationen der Feldtheorie in den multisymplektischen Formalismus vorgestellt. Diese waren in Form von auf  $\mathcal{M}$  projizierbaren Vektorfeldern  $\xi$  auf  $\mathcal{E}$  gegeben. Es existierte eine kanonische Hebungsvorschrift zu Vektorfeldern  $\xi_{\mathcal{P}}$  auf  $\mathcal{P}$ . Diese waren Hamiltonsche Vektorfelder zu den Hamiltonschen Formen

$$\mathcal{I}(\xi) = \xi_{\mathcal{P}} \lrcorner \Theta. \quad (5.11)$$

Wir betrachten nun die Gruppe der Diffeomorphismen auf  $\mathcal{M}$ , die außerhalb eines gegebenen, kompakten Gebietes als Identität operieren. Für diese, so nehmen wir an, sei eine Hebung zu Bündeldiffeomorphismen auf  $\mathcal{E}$  gegeben. Physikalisch gesprochen sei also bekannt, wie die raum-zeitlichen Transformationen lokal auf den Feldern operieren, ja um welchen Typ Felder es sich handelt. Wir erwarten für diese Transformationsgruppe eine Verbindung zum bekannten Energie-Impuls-Tensor, die der folgende Satz in der Tat herstellt. Die dabei auftretenden  $\mathcal{G}$ -äquivalenten Lagrange-Dichten wurden in Definition 3.5.3 eingeführt.

**Satz 5.2.1 ([33], thm. 3.1)** *Es sei  $\mathcal{L}$  eine  $\mathcal{G}$ -äquivalente Lagrange-Dichte,  $\mathcal{G} \subset \text{Aut}(\mathcal{E})$ . Weiter sei jedem Vektorfeld mit kompaktem Träger auf  $\mathcal{M}$ ,  $\xi_{\mathcal{M}} \in \mathfrak{X}_c(\mathcal{M})$ , ein Vektorfeld  $\xi_{\mathcal{E}}$  auf  $\mathcal{E}$  zugeordnet, so daß die Flußabbildung zu  $\xi_{\mathcal{E}}$  in  $\mathcal{G}$  liegt und diejenige zu  $\xi_{\mathcal{M}}$  überlagert. Zu jeder Lösung  $\varphi \in \Gamma(\mathcal{E})$  der Euler-Lagrange-Gleichungen zu  $\mathcal{L}$  existiert genau eine  $(1, 1)$ -Tensor-dichte  $\mathcal{T}(\varphi)$  auf  $\mathcal{M}$  mit*

$$\int_{\Sigma} \pi^*(\mathcal{I}(\xi_{\mathcal{E}})) = \int_{\Sigma} T_{\nu}^{\mu}(\varphi) \xi_{\mathcal{M}}^{\nu} d_{\mu}x, \quad (5.12)$$

für alle  $\xi_{\mathcal{M}} \in \mathfrak{X}_c(\mathcal{M})$  und alle Hyperflächen  $\Sigma \subset \mathcal{M}$ . Dabei bezeichnet  $\pi = \mathbb{F}\mathcal{L}(j^1\varphi)$  den aus  $\varphi$  gewonnenen Schnitt in  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{I}(\xi_{\mathcal{E}})$  die nach Satz 3.5.2 definierte  $(n-1)$ -Form.

Für einen Beweis verweisen wir auf die zitierte Arbeit.

BEMERKUNG. Der so definierte Tensor unterscheidet sich von der kanonischen Definition

$$t_{\nu}^{\mu}(\varphi) = L\delta_{\nu}^{\mu} - \frac{\partial L}{\partial v^{\lambda}} \partial_{\mu} \varphi^{\lambda} \quad (5.13)$$

um einen Divergenzterm. Ist auf der Raum-Zeit eine Metrik gegeben, so kann man zeigen, daß  $\mathcal{T}$  mit dem Hilbert-Tensor übereinstimmt und somit automatisch symmetrisch ist ([33]).



# Kapitel 6

## Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit war es, die Tragfähigkeit der geometrischen Begriffe der multisymplektischen Formulierung von Feldtheorien zu prüfen und nach algebraischen Strukturen zu suchen, die die bewährte Poisson-Struktur der symplektischen Mechanik imitieren. Zum Schluß dieser Arbeit seien hier einige Probleme erwähnt, die sich an die Untersuchung anschließen.

Im ersten Kapitel wurde dargelegt, daß Feldtheorien höherer Ordnung als solche erster Ordnung beschrieben werden können. Dies ist aber nur unter Einführung neuer Felder möglich. Für die Theorie der Gravitation im PALATINI-Formalismus bedeutet dies zum Beispiel, daß 100 Feldvariablen und konjugierte Impulse statt der in der üblichen ADM-Formulierung auftretenden 20 unabhängigen Felder verwendet werden müssen. Auch steigt die Zahl der betrachteten Nebenbedingungen stark an: 84 statt 8, von denen noch 72 zweiter Ordnung im DIRACschen Sinne sind ([30]). Dies macht eine direkte Behandlung von Theorien höherer Ordnung wünschenswert. In der Tat wird für den Beweis der Super-Jacobi-Identität lediglich benutzt, daß die multisymplektische Form  $\Omega$  exakt ist. Eine mögliche Definition des multisymplektischen Phasenraumes (dieser ist nicht mehr eindeutig gegeben) orientiert sich an der Gestalt von  $\mathcal{Z}$ . Man setzt wieder faserweise

$$\mathcal{Z}^{k-1} = \{z \in \Lambda^{n+1}(\mathfrak{J}^{k-1}\mathcal{E}) \mid \xi \lrcorner \eta \lrcorner z = 0 \text{ für alle } \xi, \eta \in \mathfrak{X}\mathfrak{J}^{k-1}\mathcal{E}\}. \quad (6.1)$$

Auf  $\mathcal{Z}^{k-1}$  existiert nun wieder eine  $n$ -Form  $\Theta$ , deren äußeres Differential als multisymplektische Form dient ([30]).

Das Beispiel der Gravitation, aber auch die Behandlung von Yang-Mills-Theorien stellen die Frage, wie sich Nebenbedingungen, die durch Symmetrien zustande kommen, im multisymplektischen Formalismus algebraisch – etwa im DIRACschen Sinne ([37]) – fassen lassen. Ein erster Ausgangspunkt dazu ist eine Arbeit von KIJOWSKI und RUDOLPH ([45]), die sich mit Eichtransformationen in der multisymplektischen Formulierung von Yang-Mills-Theorien beschäftigen.

In der algebraischen Formulierung von Feldtheorien spielt das punktweise Produkt von zwei Observablen  $F$  und  $G$ , das in jedem Punkt  $\pi$  des (unendlichdimensionalen) Phasenraumes über die Beziehung

$$(F \cdot G)(\pi) = F(\pi)G(\pi) \quad (6.2)$$

definiert ist, eine wichtige Rolle. Interpretiert man die Observablen  $F$  und  $G$  wie in (5.7) als Integral über mit dem Schnitt  $\pi$  zurückgezogene  $(n-1)$ -Formen  $f$  und  $g$ , so entspricht dies einer symmetrischen Verknüpfung von  $f$  und  $g$  zu einer  $2(n-1)$ -Form auf der Diagonalen von  $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ . Im Fall

$n = 1$  ergibt sich daraus gerade das punktweise Funktionenprodukt auf dem Phasenraum zu einer Zeit  $t$ . Es ist nun zu untersuchen, ob sich damit die Super-Poisson-Lie-Klammer zu einer Super-Poisson-Struktur ausbauen läßt.

Das Ziel einer algebraischen Formulierung der klassischen Theorie ist die Suche nach Hinweisen für die quantisierte Version. Nachdem aber die Entwicklung eines gegebenen Systems nicht durch Anfangswerte in einem Punkt bestimmt ist, ist die Existenz einer multisymplektischen Quantentheorie fraglich.

Davon abgesehen treten eine Reihe von weiteren Problemen auf, die hier kurz vorgestellt werden sollen.

Die unterschiedlichen Gradierungen im KANATCHIKOVschen Zugang von Produkt und Klammer machen eine Behandlung im Rahmen der Deformationsquantisierung unmöglich. Andererseits stellt die Abwesenheit eines Produktes im allgemeinen Fall eine sehr große Freiheit dar.

Weiter existieren keine kanonischen Vertauschungsregeln wie in den Darbouxschen Koordinaten der Hamiltonschen Mechanik. Ein Darbouxches Theorem läßt sich nur für ganz bestimmte typische Fasern  $\mathcal{F}$  angeben, zum Beispiel wenn  $\mathcal{E}$  ein Element der antisymmetrischen Tensoralgebra von  $T\mathcal{M}$  ist. Vorschläge zur Ersetzung finden sich in [40, 36]. Dagegen trägt der multisymplektische Phasenraum  $\mathcal{P}$  auf natürliche Weise eine Polarisierung  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$ , deren Blätter 1-Lagrangesche Untermannigfaltigkeiten im Sinne von CANTRIJN et al. ([10]) darstellen. Dies legt nahe, die Methoden der geometrischen Quantisierung ([82]) auf die multisymplektische Theorie auszudehnen.

Nach der besonderen Rolle, die die kovariante Hamilton-Jacobische Differentialgleichung für die algebraische Beschreibung von Lösungen besitzt, stellt sich natürlich auch die Frage nach einer kovarianten Version der WKB-Näherung.

# Anhang A

## Zusammenhänge und Jetbündel

### A.1 Zusammenhänge in $\mathcal{E}$

Das erste Jetbündel eröffnet neben der Auszeichnung eines Zusammenhanges eine zweite Möglichkeit, in invarianter Weise über erste Ableitungen von Schnitten in  $\mathcal{E}$  zu sprechen. Die genaue Beziehung klärt der folgende Satz ([49], ch. IV.17).

**Satz A.1.1** *Es besteht eine 1 – 1-Beziehung zwischen Zusammenhängen in  $\mathcal{E}$ , also fußpunktstreuen Projektionen*

$$\Phi : T\mathcal{E} \rightarrow \mathfrak{X}\mathcal{E}, \quad (\text{A.1})$$

und Abbildungen

$$\Gamma : \mathcal{E} \rightarrow \mathfrak{J}^1\mathcal{E}. \quad (\text{A.2})$$

BEWEIS. Es sei  $\mathbf{v}$  ein Punkt in  $\mathcal{E}$  über  $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$ . Zu einem gegebenen Zusammenhang  $\Phi$  kann man in  $\mathbf{v}$  einen Schnitt  $\varphi \in \Gamma_{\mathbf{m}}(\mathcal{E})$  finden, dessen Tangentialraum in  $\mathbf{v}$  mit dem Kern der Projektion  $\Phi$  übereinstimmt. Setze nun die Abbildung  $\Gamma$  als  $\Gamma(\mathbf{v}) = j_{\mathbf{m}}^1\varphi$ . Da für die Auszeichnung von  $\varphi$  und die Definition von  $\Gamma$  jeweils nur der Funktionswert und die ersten Ableitungen in  $\mathbf{m}$  benötigt werden, ist die Abbildung wohldefiniert.

Es sei umgekehrt eine Abbildung  $\Gamma$  gegeben. Jeder lokale Schnitt  $\varphi \in \Gamma_{\mathbf{m}}(\mathcal{E})$  mit  $\varphi(\mathbf{m}) = \mathbf{v}$  zeichnet in  $\mathbf{v}$  einen zum vertikalen Anteil des Tangentialraumes  $T_{\mathbf{v}}\mathcal{E}$  komplementären Unterraum aus. Damit ist eine Projektion der Tangentialvektoren an  $\mathcal{E}$  auf ihren vertikalen Anteil gegeben. Wählt man nun für jeden Punkt  $\mathbf{v}$  über  $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$  einen Schnitt  $\varphi \in \Gamma_{\mathbf{m}}(\mathcal{E})$ , der  $j_{\mathbf{m}}^1\varphi = \Gamma(\mathbf{v})$  erfüllt, so ist über die erwähnte Projektion ein Zusammenhang in  $\mathcal{E}$  gegeben.

Offensichtlich gewinnt man den ursprünglichen Zusammenhang zurück, wenn man zuerst aus diesem die Abbildung  $\Gamma$  und aus dieser die Projektion  $\Phi$  konstruiert, denn im ersten Schritt wählt man die Klasse der horizontalen Schnitte, im zweiten aber die Projektion so, daß die gegebene Klasse von Schnitten horizontal wird.  $\square$

**Folgerung A.1.2** *Jeder Zusammenhang in  $\mathcal{E}$  definiert einen Isomorphismus von  $\mathfrak{J}^1\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  mit seinem assoziierten Vektorbündel.*

BEWEIS. Die zu einem Zusammenhang gehörige Abbildung  $\Gamma$  definiert einen globalen Schnitt von  $\mathfrak{J}^1\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ . Identifiziert man diesen Schnitt mit dem Nullschnitt in  $\mathfrak{V}\mathcal{E} \otimes T^*\mathcal{M}$ , so erhält man den gesuchten Isomorphismus.  $\square$

Trägt  $\mathcal{E}$  zusätzlich die Struktur eines Vektorbündels, so lassen sich weitere Aussagen über die Abhängigkeit der zu einem linearen Zusammenhang  $\Phi$  gegebenen Abbildung  $\Gamma$  vom Fußpunkt treffen. Es gilt in induzierten Koordinaten

$$\Gamma(x^\mu, v^A) = (x^\mu, v^A, \Gamma_{v^B}^A(x^\mu) v^B). \quad (\text{A.3})$$

Die Symbole  $\Gamma_{\mu B}^A$  stimmen mit den lokalen Koeffizientenfunktionen der zu  $\Phi$  assoziierten kovarianten Ableitung überein.

## A.2 Isomorphie von $\mathfrak{J}^1\mathcal{E}$ und $\mathfrak{V}\mathcal{E} \otimes T^*\mathcal{M}$

Die folgenden Überlegungen stellen Resultate für Abschnitt 3.6.2 bereit. Wir wollen einen Zusammenhang  $\Gamma$  in  $\mathcal{E}$  nutzen, um die affinen Abbildungen, aus denen der multisymplektische Phasenraum  $\mathcal{P}$  nach der Definition 3.1.1 besteht, in lineare plus konstante Abbildungen zu zerlegen. Damit sind wir in der Lage, die koordinatenabhängige Definition der De Donder-Weylschen Funktion  $\mathcal{H}$  invariant zu fassen.

Da  $\mathfrak{J}^1\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  ein affines Bündel mit assoziiertem Vektorbündel  $\mathfrak{V}\mathcal{E} \otimes T^*\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$  ist, definiert jeder Schnitt  $\mathcal{E} \rightarrow \mathfrak{J}^1\mathcal{E}$  einen Isomorphismus zwischen den beiden Bündeln, indem man den gegebenen Schnitt des ersteren auf den Nullschnitt des letzteren abbildet und für die übrigen Punkte der Fasern die affine Struktur ausnutzt. Ein solcher Schnitt ist aber mit jedem Zusammenhang in  $\mathcal{E}$  gegeben. In induzierten Koordinaten wird damit dem Punkt  $(x^\mu, v^A, v_\mu^A)$  in  $\mathfrak{J}^1\mathcal{E}$  der Punkt  $(x^\mu, v^A, v_\mu^A - \Gamma_\mu^A)$  zugeordnet. Der so erklärte Isomorphismus zu einem gegebenen Zusammenhang sei mit  $i_\Gamma$  bezeichnet. Mit  $i_\Gamma$  kann man aber die affinen Abbildungen aus  $\mathcal{P}$  in einen linearen Anteil und eine Konstante aufspalten:

$$\mathbf{p}(\bar{\mathbf{v}}) = p_1(i_\Gamma(\bar{\mathbf{v}})) + p_2(\mathbf{v}), \quad (\text{A.4})$$

$\mathbf{v} \in \mathcal{E}$ ,  $\mathbf{p} \in (\mathcal{P})_{\mathbf{v}}$ ,  $\bar{\mathbf{v}} \in (\mathfrak{J}^1\mathcal{E})_{\mathbf{v}}$ .  $p_1$  ist damit ein Schnitt in dem zu  $\mathfrak{V}\mathcal{E} \otimes T^*\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$  dualen Bündel, während  $p_2$  einen Schnitt in dem auf  $\mathcal{E}$  zurückgezogenen Volumen-Bündel  $\Lambda^n T^*\mathcal{M}$  beschreibt. Mit einer Volumenform auf  $\mathcal{M}$  kann man also aus  $p_2$  eine Funktion gewinnen. In induzierten Koordinaten findet man für  $\mathbf{p} = (x^\mu, v^A, p_A^\mu, p)$  die Beziehungen

$$p_1 = (x^\mu, v^A, p_A^\mu, p), \quad p_2 = (x^\mu, v^A, p + p_A^\mu \Gamma_\mu^A). \quad (\text{A.5})$$

Für reguläre Lagrange-Dichten läßt sich das Bild der Legendre-Transformation durch

$$(x^\mu, v^A, p_A^\mu, p = -\mathcal{H}(x^\mu, v^A, p_A^\mu)) \quad (\text{A.6})$$

beschreiben. Dies läßt sich auch als Schnitt in  $\mathcal{P} \rightarrow \Pi$  auffassen, wobei  $\Pi$  das Legendre-Bündel nach Definition 3.1.2 bezeichnet. Benutzt man nun den Zusammenhang  $\Gamma$ , so erhält man mit der geschilderten Aufspaltung eine Funktion  $\mathcal{H}_\Gamma$  auf  $\Pi$ , die in lokalen Koordinaten

$$-\mathcal{H}_\Gamma(x, v, \vec{p}) = -\mathcal{H}(x, v, \vec{p}) + p_A^\mu \Gamma_\mu^A \quad (\text{A.7})$$

erfüllt.

### A.3 Ein Zusammenhang in $\Pi$

Mit dem Ergebnis des ersten Abschnitts dieses Kapitels, nach welchem sich Zusammenhänge in  $\mathcal{E}$  als Abbildungen  $\Gamma : \mathcal{E} \rightarrow \mathfrak{J}^1\mathcal{E}$  interpretieren lassen, wollen wir nun einen Zusammenhang im Legendre-Bündel  $\Pi$  konstruieren. Für dessen Definition siehe 3.1.2. Dieses Ergebnis wird in Abschnitt 3.1.3 benötigt.

Die hier vorgestellte Konstruktion eines Zusammenhanges in  $\Pi \rightarrow \mathcal{M}$  aus zwei Zusammenhängen in  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$  und  $T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  orientiert sich an KOLAŘ, [48], der die Induktion von Zusammenhängen auf  $\mathfrak{J}^1\mathcal{E}$  untersucht. In [63] wurden diese Ergebnisse auf den multisymplektischen Fall angewendet. Wir benutzen die Isomorphie (Tensorprodukte sind über  $\mathcal{E}$  zu nehmen)

$$\Pi \cong (\mathfrak{W}\mathcal{E})^* \otimes T\mathcal{M} \otimes \Lambda^n T^*\mathcal{M}, \quad (\text{A.8})$$

um aus den gegebenen Daten

$$\Gamma : \mathcal{E} \rightarrow \mathfrak{J}^1\mathcal{E}, \quad (\text{A.9})$$

$$\Lambda : T\mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{J}^1 T\mathcal{M} \quad (\text{A.10})$$

einen Zusammenhang

$$\bar{\Gamma} : \Pi \rightarrow \mathfrak{J}^1\Pi \quad (\text{A.11})$$

zu konstruieren. Zunächst bemerken wir, daß zu  $\Lambda$  auf dem Kotangententialbündel ebenfalls ein Zusammenhang  $\Lambda^*$  gegeben ist, der in lokalen Koordinaten  $(x^\mu, \alpha_\nu)$  die folgende Gestalt annimmt

$$\Lambda^* : (x^\mu, \alpha_\nu) \mapsto (x^\mu, \alpha_\nu, -\Lambda_{\mu\nu}^p(x) \alpha_\rho). \quad (\text{A.12})$$

Durch Bildung des  $n$ -fachen antisymmetrischen Tensorproduktes erhält man eine Abbildung

$$\Lambda^n T^*\mathcal{M} \rightarrow \Lambda^n \mathfrak{J}^1 T^*\mathcal{M},$$

die sich unter Verwendung der natürlichen Abbildung

$$\begin{aligned} \Lambda^n \mathfrak{J}^1 T^*\mathcal{M} &\rightarrow \mathfrak{J}^1 \Lambda^n T^*\mathcal{M} \\ j_{\mathbf{m}}^1 \alpha_1 \wedge \cdots \wedge j_{\mathbf{m}}^1 \alpha_n &\mapsto j_{\mathbf{m}}^1 (\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n), \quad \alpha_i \in \Gamma(T^*\mathcal{M}), \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

zu

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda} : \Lambda^n T^*\mathcal{M} &\rightarrow \mathfrak{J}^1 \Lambda^n T^*\mathcal{M}, \\ (x^\mu, \alpha) &\mapsto (x^\mu, \alpha, -\Lambda_{\mu\nu}^v \alpha) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

ergänzen läßt.

Wenden wir uns nun dem Anteil des gesuchten Zusammenhanges zu, der mit  $\mathcal{E}$  verbunden ist. Aus  $\Gamma$  konstruiert man durch vertikale Verlängerung eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathfrak{W}\Gamma : \mathfrak{W}\mathcal{E} &\rightarrow \mathfrak{W}\mathfrak{J}^1\mathcal{E} \\ (x^\mu, v^A, w^A) &\mapsto (x^\mu, v^A, \Gamma_\mu^A(x, v), w^A, \partial_B \Gamma_\mu^A(x, v) w^B), \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

und aus dieser unter Benutzung der natürlichen Abbildung (s. z.B. [60])

$$\mathfrak{W}\mathfrak{J}^1\mathcal{E} \rightarrow \mathfrak{J}^1\mathfrak{W}\mathcal{E} \quad (\text{A.16})$$

einen Zusammenhang im Vertikalbündel zu  $\mathcal{E}$ . In Koordinaten berechnet man für die entstandene Abbildung

$$(x^\mu, v^A, w^A) \mapsto (x^\mu, v^A, w^A, \Gamma_\mu^A(x, v), \partial_B \Gamma_\mu^A(x, v) w^B). \quad (\text{A.17})$$

Auf dem dualen Vertikalbündel induziert dies die letzte nötige Zutat

$$\begin{aligned} (\mathfrak{V}\Gamma)^* : (\mathfrak{V}\mathcal{E})^* &\rightarrow \mathfrak{J}^1(\mathfrak{V}\mathcal{E})^* \\ (x^\mu, v^A, w_A) &\mapsto (x^\mu, v^A, w_A, \Gamma_\mu^A(x, v), -\partial_A \Gamma_\mu^B(x, v) w_B). \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Unter Zusammenfügung der Einzelabbildungen (A.10), (A.14) und (A.18) mit dem Tensorprodukt und unter Verwendung von (A.13) für  $\otimes$  ergibt sich für den gesuchten Zusammenhang  $\bar{\Gamma}$  folgender Kartenausdruck

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma} : (\mathfrak{V}\mathcal{E})^* \otimes T\mathcal{M} \otimes \Lambda^n T^* \mathcal{M} &\rightarrow \mathfrak{J}^1((\mathfrak{V}\mathcal{E})^* \otimes T\mathcal{M} \otimes \Lambda^n T^* \mathcal{M}) \\ (x^\mu, v^A, p_A^\mu) &\mapsto (x^\mu, v^A, p_A^\mu, \Gamma_\mu^A(x, v), \bar{\Gamma}_{\mu A}^v), \\ \bar{\Gamma}_{\mu A}^v &= -\partial_A \Gamma_\mu^B(x, v) p_B^v - \Lambda_{\mu\rho}^v(x) p_A^\rho + \Lambda_{\mu\sigma}^\sigma(x) p_A^v. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Nutzt man schließlich die angenommene Torsionsfreiheit der zu  $\Lambda$  gehörenden kovarianten Ableitung aus, also  $\Lambda_{\mu\nu}^\rho = \Lambda_{\nu\mu}^\rho$ , so bleibt bei einer Summation über  $\mu - \nu$  nur der erste der drei Summanden von  $\bar{\Gamma}_{\mu A}^v$  bestehen,

$$\bar{\Gamma}_{\mu A}^\mu = -\partial_A \Gamma_\mu^B(x, v) p_B^\mu. \quad (\text{A.20})$$



# Literaturverzeichnis

- [1] R. ABRAHAM, J. E. MARSDEN: *Foundations of Mechanics*. Addison-Wesley, Redwood City, CA, <sup>2</sup>1987.
- [2] V. ALDAYA, J. A. DE AZCÁRRAGA: *Geometric Formulation of Classical Mechanics and Field Theory*. Riv. Nuov. Cimen. **3**(10) (1990), 1-66.
- [3] V. I. ARNOLD: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer Verlag, Berlin, 1978.
- [4] F. BAYEN, M. FLATO, C. FRONSDAL, A. LICHNEROWICZ, D. STERNHEIMER: *Deformation Theory and Quantisation*. Ann. Phys. **111** (1978), 61-151.
- [5] G. BARNICH: *Brackets in the Jet-bundle approach to field theory*. In M. Henneaux (Hrsg.): *Secondary calculus and cohomological physics*. Proceedings of a conference, Moscow, Russia, August 24-31, 1997. Contemp. Math. **219** (1998), 17-27, hep-th/9709164.
- [6] G. BARNICH, R. FULP, T. LADA, J. STASHEFF: *The sh Lie structure of Poisson brackets in field theory*. Commun. Math. Phys. **191**, 3 (1998), 585-601, hep-th/9702176.
- [7] R. A. BERTLMANN: *Anomalies in Quantum Field Theory*. Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [8] E. BINZ, H. FISCHER, J. ŚNIATYCKI: *Geometry of Classical Fields*. North-Holland Mathematical Studies **154**, North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [9] M. BORDEMANN, M. WALTER: *Quantum integrable Toda-like systems in deformation quantization*. Lett. Math. Phys. **48**, No.2 (1999), 123-133.
- [10] F. CANTRIJN, L. A. IBORT, M. DE LEON: *On the geometry of multisymplectic manifolds*. J. Aust. Math. Soc., Ser. A **66**, No.3 (1999), 303-330.
- [11] C. CARATHÉODORY: *Über die Variationsrechnung bei mehrfachen Integralen*. Acta Szeged **4** (1929), 193-216.  
Nachdruck in C. Carathéodory. *Gesammelte mathematische Schriften Bd. I*, C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München, 1954, 401-426.
- [12] J. F. CARIÑENA, M. CRAMPIN, A. IBORT: *On the multisymplectic formalism for first order field theories*. Differ. Geom. Appl. **1** (1991), 345-374.
- [13] P. R. CHERNOFF, J. E. MARSDEN: *Some Basic Properties of Infinite Dimensional Hamiltonian Systems*. In *Géométrie symplectique et physique mathématique*, Coll. Intern. Aix-en-Provence 1974, No. **237** (1975), 313-330.

- [14] P. DEDECKER: *Calcul des Variations, formes différentielles at champs géodésiques*. In: Colloqu. Internationaux du C.N.R.S., LII, Géométrie Différentielle, Strasbourg, 1953, 17-34.
- [15] \_\_\_\_\_, *Poisson brackets with divergence terms in field theories: three examples*. Contemp. Math. **227** (1999), 67-78.
- [16] J. DITO: *Star-Product Approach to Quantum Field Theory: The Free Scalar Field*. Lett. Math. Phys. **20** (1990), 125-134.
- [17] TH. DE DONDER: *Théorie Invariantive du Calcul des Variations*. Gauthier-Villars & Cie., Paris, 1930.
- [18] M. DÜTSCH, K. FREDENHAGEN: *Algebraic Quantum Field Theory, Perturbation Theory, and the Loop Expansion*, Commun. Math. Phys. **219** (2001), 5-30, [hep-th/0001129](#).
- [19] M. DÜTSCH, K. FREDENHAGEN: *Perturbative Algebraic Field Theory, and Deformation Quantization*. Proceedings of the Conference on Mathematical Physics in Mathematics and Physics, Siena June 20-25 2000, [hep-th/0101079](#).
- [20] A. ECHEVERRÍA-ENRÍQUEZ, M. C. MUÑOZ-LECANDA: *Variational calculus in several variables: a Hamiltonian approach*. Ann. Inst. Henri Poincaré **56.1** (1992), 27-47.
- [21] A. ECHEVERRÍA-ENRÍQUEZ, M. C. MUÑOZ-LECANDA, N. ROMAN-ROY: *On the Multimomentum Bundles and the Legendre Maps in Field Theories*. Rep. Math. Phys. **45**, No.1 (2000), 85-105, [math-ph/9904007](#).
- [22] \_\_\_\_\_, *Geometry of Multisymplectic Hamiltonian First-order Field Theories.*, J. Math. Phys. **41**(11) (2000), 7402-7444, [dg-ga/0004005](#).
- [23] \_\_\_\_\_, *A Geometrical Analysis of the Field Equations in Field Theory.*, unveröffentlicht, [math-ph/0105018](#).
- [24] M. FORGER, C. PAUFLER, H. RÖMER: *Poisson Brackets in Multisymplectic Field Theory*. In Vorbereitung.
- [25] M. FORGER, H. RÖMER: *A Poisson Bracket on Multisymplectic Phase Space*. Vortrag von H. Römer auf dem 32nd Symposium on Mathematical Physics, Thorn, Polen, Juni 2000, [math-ph/0009037](#), Rep. on Math. Phys. **48** (2001).
- [26] R. O. FULP, J. K. LAWSON, L. K. NORRIS: *Generalized symplectic geometry as a covering theory for the Hamiltonian theories of classical particles and fields*. J. Geom. Phys. **20** (1996) 195-206.
- [27] D. GIULINI: *Ashtekar Variables in Classical General Relativity*. In J. Ehlers (Hrsg.): *Canonical gravity: from classical and quantum*. Proc. 117th WE Heraeus Seminar, Bad Honnef, Germany, 1993. Springer Lect. Notes Phys. **434**, Springer, Berlin, 81-112(1994)
- [28] \_\_\_\_\_, *The generalized thin-sandwich problem and its local solvability*. J. Math. Phys. **40**, No.5 (1999), 2470-2482.
- [29] H. GOLDSCHMIDT, SH. STERNBERG: *The Hamilton-Cartan Formalism in the Calculus of Variations*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **23,1** (1973), 203-267.

- [30] M. J. GOTAY: *A multisymplectic framework for classical field theory and the calculus of variations. I: Covariant Hamiltonian formalism*. In M. Francaviglia und D. D. Holm (Hrsg.): *Mechanics, analysis and geometry: 200 years after Lagrange*, 203-235 (1991).
- [31] \_\_\_\_\_, *A multisymplectic framework for classical field theory and the calculus of variations. II: Space + time decomposition*. *Differ. Geom. Appl.* **1**(4) (1991), 375-390.
- [32] M. J. GOTAY, J. ISENBERG, J. E. MARSDEN: *Momentum Maps and Classical Relativistic Fields I: Covariant Field Theory*, physics/9801019.
- [33] M. J. GOTAY, J. E. MARSDEN: *Stress-Energy-Momentum Tensors and the Belinfante-Rosenfeld Formula*. *Contemp. Math.* **132** (1992), 367-392.
- [34] V. GUILLEMIN, SH. STERNBERG: *Geometric asymptotics*. *Mathem. Surveys*, No. 14. Providence, RI: Amer. Math. Soc. XVIII (1977).
- [35] C. GÜNTHER: *The polysymplectic Hamiltonian formalism in field theory and calculus of variations I: the local case*. *J. Differ. Geom.* **25** (1987), 23-53.
- [36] \_\_\_\_\_, *Polysymplectic Quantum Field Theory*. In *Differential geometric methods in theoretical physics*. Proc. 15th Int. Conf., DGM, Clausthal/FRG, 1986, 14-27(1987).
- [37] M. HENNEAUX, C. TEITELBOIM: *Quantization of Gauge systems*. Princeton University Press, 1992.
- [38] I. V. KANATCHIKOV: *On field theoretic generalizations of a Poisson algebra*. *Rep. on Math. Phys.* **40.2** (1997), 225-234, hep-th/9710069.
- [39] \_\_\_\_\_, *Canonical structure of classical field theory in the polymomentum phase space*. *Rep. on Math. Phys.* **41.1** (1998), 49-90, hep-th/9709229.
- [40] \_\_\_\_\_, *Covariant Geometric Prequantization of Fields*. Beitrag zu *Proc. Ninth Marcel Grossmann Meeting, Roma (Italy), July 2-8, 2000*, gr-qc/0012038.
- [41] \_\_\_\_\_, *Precanonical quantization and the Schrödinger wave functional*. *Phys. Lett. A* **283** (2001), 25-36, hep-th/0012084.
- [42] \_\_\_\_\_, *Precanonical Quantum Gravity: Quantization Without the Space-Time Decomposition*. *Int. J. Theor. Phys.* **40.6** (2001), 1121-1149, gr-qc/0012074.
- [43] H. A. KASTRUP: *Canonical Theories of Lagrangian Dynamical Systems in Physics*. *Physics Reports* **101** (1983), 1-167.
- [44] J. KIJOWSKI: *A Finite-dimensional Canonical Formalism in the Classical Field Theory*. *Commun. Math. Phys.* **30** (1973), 99-128.
- [45] J. KIJOWSKI, G. RUDOLPH: *Canonical Structure of the theory of gauge fields interacting with matter fields*. *Rep. on Math. Phys.* **20.3** (1984), 385-400.
- [46] J. KIJOWSKI, W. SZCZYRBA: *Multisymplectic manifolds and the geometric construction of the Poisson bracket in field theory*. in J.-M. SOURIAU (ED.): *Geometrie Symplectique et Physique Mathématique*, CNRS, Paris (1975), auch als  
J. KIJOWSKI, W. SZCZYRBA: *A Canonical Structure for Classical Field Theories*. *Commun. Math. Phys.* **46** (1976), 183-206.

- [47] J. KIJOWSKI, W. TULCZYJEW: *A Symplectic Framework for Field Theories*. Springer Lect. Not. in Phys. **107**, Springer, Berlin, 1979.
- [48] I. KOLÁŘ: *Some natural operations with connections*. J. Nat. Acad. Math. India **5** (1987), 127-141.
- [49] I. KOLÁŘ, P. W. MICHOR, J. SLOVÁK: *Natural Operations in Differential Geometry*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.
- [50] T. LADA, M. MARKL: *Strongly homotopy Lie algebras*. Commun. Algebra **23**, No.6 (1995), 2147-2161, [hep-th/9406095](#).
- [51] T. LADA, J. STASHEFF: *Introduction to sh Lie algebras for physicists*. Int. J. Theor. Phys. **32** (1993), 1087-1104, [hep-th/9209099](#).
- [52] J. K. LAWSON: *A frame bundle generalization of multisymplectic field theories*. Rep. on Math. Phys. **45** (2000), 183-205, [dg-ga/9706008](#).
- [53] L. MANGIAROTTI, G. SARDANASHVILI: *On the bracket problem in covariant Hamiltonian field theory*. Unveröffentlicht (1999), [hep-th/9903220](#).
- [54] G. MARMO, G. MORANDI, N. MUKUNDA: *A Geometrical Approach to the Hamilton-Jacobi Form of Dynamics and Its Generalizations*. Riv. del Nuovo Cimen. **13** N.8 (1990), 1-74.
- [55] D. MAROLF: *The generalized Peierls bracket*. Ann. Phys. **236**, No.2 (1994), 392-412, [hep-th/9308150 v2](#).
- [56] \_\_\_\_\_, *Poisson brackets on the space of histories*. Ann. Phys. **236**, No.2 (1994), 374-391, [hep-th/9308141 v2](#).
- [57] G. MARTIN: *A Darboux Theorem for Multi-Symplectic Manifolds*. Lett. Math. Phys. **16** (1988), 133-138.
- [58] \_\_\_\_\_, *Dynamical structures for k-vector fields*. Int. J. Theor. Phys. **27**, No.5 (1988), 571-585.
- [59] M. MCLEAN, L. K. NORRIS: *Covariant field theory on frame bundles of fibered manifolds*. J. Mathem. Phys. **41** No. 10 (2000), 6808-6823.
- [60] M. MODUGNO: *Jet Involution and Prolongations of Connections*. Časopis pro Pěstování Matematiky **114** No. 4 (1989), 356-365.
- [61] E. NOETHER: *Invarianten beliebiger Differentialausdrücke*. Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. (1918), 37-44.
- [62] P. J. OLVER: *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Graduate Texts in Mathematics **107**, Springer, Berlin, 1986.
- [63] C. PAUFLER: *A Vertical Exterior Derivative in Multisymplectic Geometry and a Graded Poisson Bracket for Nontrivial Geometries*. Rep. on Math. Phys. **47** (2001), 101-119, [math-ph/0002032](#).
- [64] \_\_\_\_\_, *On the Geometry of Field Theoretic Gerstenhaber Structures*. Vortrag auf dem 32nd Symposium on Mathematical Physics, Toruń, Poland, June 2000, Rep. on Math. Phys. **48** (2001), [math-ph/0102012](#).

- [65] C. PAUFLER, H. RÖMER: *Geometry of Hamiltonian  $n$ -vectors in Multisymplectic Field Theory*. Eingereicht an J. Geom. Phys., math-ph/0102008.
- [66] \_\_\_\_\_, *De Donder-Weyl equations and multisymplectic geometry*. Erscheint in der Verhandlungen des 33rd Symposium on Mathematical Physics, Toruń, Poland, June 2001, math-ph/01007019.
- [67] R. E. PEIERLS: *The Commutation Laws of Relativistic Field Theory*. Proc. Roy. Soc. Lond. **A214** (1952), 143-157.
- [68] M. REED: *Abstract Non Linear Wave Equations*. Lect. Not. Math. **507**, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [69] J. VON RIETH: *The Hamilton-Jacobi theory of De Donder and Weyl applied to some relativistic field theories*. J. Math. Phys. **25**(4) (1984), 1102-1115.
- [70] H. RÖMER, C. PAUFLER: *Anomalies and Star Products*. In H.-D. Doebner, J.-D. Hennig, W. Lücke, V. K. Dobrev (Hrsg.): *Quantum Theory and Symmetries*. World Scientific, Singapore, 2000, hep-th/0010067.
- [71] S. V. ROMERO: *Colchete de Poisson Covariante na Teoria Geométrica dos Campos*. Dissertation, Universität São Paulo, Brasilien, Juni 2001.
- [72] H. RUND: *The Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variations*. Hazell, Watson and Viney Ltd., Aylesbury, Buckinghamshire, U.K., 1966.
- [73] G. A. SARDANASHVILY: *Multimomentum Hamiltonian Formalism*. Unveröffentlicht (1994), hep-th/9403172.
- [74] \_\_\_\_\_, *Multimomentum Hamiltonian Formalism in Quantum Field Theory*. Int. J. Theor. Phys. **33.12** (1994), 2365-2379.
- [75] D. J. SAUNDERS: *The Geometry of Jet Bundles*. Lond. Math. Soc. Lect. Notes Ser. 142, Cambr. Univ. Pr., Cambridge, 1989.
- [76] \_\_\_\_\_, *A note on Legendre transformations*. Diff. Geom. Appl. **1** (1991), 109 - 122.
- [77] A. TRAUTMAN: *Noether Equations and Conservation Laws*. Commun. Math. Phys. **6** (1967), 248-261.
- [78] W. M. TULCZYJEW: *The graded Lie algebra of multivector fields and the generalized Lie derivative of forms*. Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Math. Astron. Phys. **22**(1974), 937-942.
- [79] S. WALDMANN: *Zur Deformationsquantisierung in der klassischen Mechanik: Observablen, Zustände und Darstellungen*. Doktorarbeit, Fakultät für Physik, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg im Breisgau, 1999.
- [80] A. WEINSTEIN: *Symplectic Structures on Banach Manifolds*. Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969), 1040-41.
- [81] H. WEYL: *Geodesic Fields in the Calculus of Variation for Multiple Integrals*. Ann. Mathematics **36**, No. 3 (1935), 607-629.
- [82] N. M. J. WOODHOUSE: *Geometric Quantization*. Clarendon Press, Oxford, 1992.



# Lebenslauf

- Geboren am 24. Februar 1972 in Dresden.
- Allgemeine Hochschulreife am 5. Juli 1990 an der Erweiterten Allgemeinbildenden Polytechnischen Oberschule „Johann Heinrich Pestalozzi“, Dresden.
- Aufnahme des Physikstudiums zum Wintersemester 1991/92 an der Technischen Universität Dresden, dort Vordiplom am 26. Juli 1993.
- Studienaufenthalt an der University of Sheffield, UK, im akademischen Jahr 1993/94.
- Wechsel an die Fakultät für Physik und Geowissenschaften an der Universität Leipzig zum Wintersemester 1994/95.
- Diplomarbeit „Untersuchung zu Eichanomalien im Rahmen des Hamiltonschen Zuganges: Anomalien und Gerbes“ bei Prof. Dr. G. Rudolph, Institut für Theoretische Physik, Fakultät für Physik und Geowissenschaften, Universität Leipzig.
- Abschluß des Physik-Diplomstudienganges mit Diplom am 20. August 1998.
- September 1998 bis Dezember 1998 Tätigkeit als wissenschaftliche Hilfskraft bei Prof. Dr. B. Geyer, Universität Leipzig.
- Seit 1. Januar 1998 Anstellung als wissenschaftliche Hilfskraft, später als wissenschaftlicher Angestellter, bei Prof. Dr. H. Römer, Fakultät für Physik, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg im Breisgau.





# Danksagung

Viele haben zum Gelingen dieser Arbeit auf direktem oder indirektem Wege beigetragen, und es ist mir eine große Freude, ihnen allen an dieser Stelle danken zu dürfen.

Meinem Vater Peter und meiner Großmutter Elly, deren Unterstützung mir manche Sorge genommen hat.

Herrn Prof. Hartmann Römer für die freundliche Aufnahme in seine Abteilung, für allen Zuspruch, die angenehme, viele Freiräume lassende Zusammenarbeit, die fruchtbaren Diskussionen im Rahmen und außerhalb dieser Arbeit und die wertvollen Korrekturvorschläge.

Martin Walter für die gemeinsame Arbeit, die zahlreichen Lektionen im Freiklettern, seine Herzlichkeit und nicht zuletzt sein sorgfältiges Korrekturlesen dieser Arbeit.

Torsten Bringmann für die geduldige Unterweisung im Go-Spiel.

Allen Angehörigen der Abteilung Feldtheorie und Teilchenphänomenologie für die freundliche, aufgeschlossene Atmosphäre, namentlich Peter Marquard für die kräftige Unterstützung bei der Betreuung der Rechenapparate und Michael Trunk für die Organisation der jährlichen Wanderungen und Sommerfeste.

Den Ehemaligen Peter Glöbner, Joachim Schirmer und Axel Winterhalter für die anregenden Gespräche.

Tamsin Sanderson für die Durchsicht der englischen Zusammenfassung.

Martin Bordemann für viele Diskussionen über algebraische und geometrische Sachverhalte, insbesondere seinen Hinweis auf das komplexe Hopfbündel.

Ganz besonders natürlich Christine für ihre Liebe und Ermunterung.